XIANGLIANGFA QIAOJIE SHUXUE GAOKAOTI

向量法巧解数学高考题

赵南平 编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

向量法巧解数学高考题

XIANGLIANGFA QIAOJIE
SHUXUE GAOKAOTI

赵南平 编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书除系统介绍了平面向量和空间向量的基础知识（有的内容还作了拓展）外，还介绍了向量知识与代数、三角函数、解析几何知识的交汇，并全面介绍了向量在代数、三角函数、平面几何、立体几何、解析几何、物理等方面的应用，尤其是重点介绍了向量在立体几何、解析几何中的应用，内容独特、题型全面、针对性强，适合高中生和教师阅读。

图书在版编目（CIP）数据

向量法巧解数学高考题/赵南平编著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.7

ISBN 978-7-5603-2925-3

Ⅰ．向…　Ⅱ．赵…　Ⅲ．数学课-高中-解题-升学参考资料　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 131772 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　张永芹　刘瑶
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 22.75　字数 403 千字
版　　次　2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2925-3
印　　数　1～3 000 册
定　　价　28.00 元

（如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换）

作者简介

赵南平，男，1944 年 9 月生人，福建省福州市人。1965 年 7 月毕业于福建师范学院数学系（本科），1988 年被评为中学数学特级教师。赵南平从事数学教学工作已有 40 多年，他在教学过程中注重培养学生掌握解题规律，提高学生的解题能力，所指导的学生多次在数学竞赛中获奖。赵南平至今已出版著作 11 种，并在全国各种数学刊物上发表论文 30 多篇，其中部分被收入上海教育出版社出版的《名师授课录》一书，部分被收入台湾九章出版社出版的《名师授课手记》一书。

赵南平曾担任过福建省重点中学校长，并获得福建省“五一劳动奖章”、“全国优秀教师”等多项荣誉称号。其传略材料及主要业绩介绍已入选由国家人事部专家服务中心组织编写的权威辞书《中国专家大辞典》以及《中国特级教师》、《世纪之光——共和国英才全集》、《三个代表的理论与实践》（人物事迹卷）等多种辞书。

⊙ 前言

伴随着物理学的发展应运而生的向量，已进入中学数学教学内容。用向量方法解决立体几何和解析几何中的有关问题、向量知识与三角函数解析几何等知识的交汇已成为近几年高考数学中的热门考点，越来越成为高考考查考生数学思维能力和分析问题、解决问题能力的一个重要方面。

由于向量集数与形于一身，既有代数的抽象性，又有几何的直观性，使它成为中学数学知识网络的一个交汇点，成为联系众多数学知识的媒介。利用向量可以解决代数、三角函数、平面几何、立体几何、解析几何中的有关问题，而且向量知识在物理和工程技术等方面也有很大的应用价值。因此，在高中阶段能学会用向量方法处理数学及其他学科的有关问题，无疑有利于学生的进一步深造和直接参与实际工作。同学们应树立起利用向量方法解决问题的意识。

运用向量方法处理立体几何问题显得特别有效，它将对空间想象力和逻辑思维能力有较高要求的问题化归为简单的向量运算，大大降低了难度，增强了可操作性，为学生增添了一种理想的代数工具。因此，掌握这种方法对学生解立体几何问题显得尤为重要和实用。

一、本书的独特之处

1. 内容系统、全面、独特。本书除系统介绍平面向量和空间向量的基础知识(有的内容还作了拓展)外,还介绍了向量知识与代数、三角函数、解析几何知识的交汇,并全面介绍了向量在代数、三角函数、平面几何、立体几何、解析几何、物理等方面的应用,尤其是重点介绍了向量在立体几何、解析几何中的应用,内容独特,分门别类专门论述,这在其他有关向量的教辅书(更不用说高考复习资料了)中是极为少见的。

2. 以"解法指导"为主线。旨在提高读者的解题能力和高考应试能力,某数学大师说得好:"掌握一种解题方法比解一百道题更重要。"本书针对各种题型均总结出了解这种题型的方法、规律和技巧(有的是编者的教研成果,独特的解题方法会令读者有耳目一新的感觉),这是本书的精华所在,其他同类教辅书和高考复习资料极少这样处理,独特的解题方法也极少出现。编者以实用性、针对性和可操作性为原则,教读者怎样解题,读者若掌握了这些解题规律和方法,可以举一反三,触类旁通,解题能力将大大提高。

3. 例题类型、题型全面。本书所选例题大多来自高考试题,其题型全面,极具典型性和代表性,例题的解答均以本章节所总结出的解题方法和规律为指导,体现通性通法,读者可从中体会该题型的解题方法,丰富解题经验。

4. 针对性强,本书各章节除"解法指导"栏目外,还设置有"走进考场"栏目,编者将近几年高考试题中的相关问题集中到一起提供给读者练习,希望读者尽早接触高考试题。读者可通过相应的练习检查自己对该题型解题方法的掌握程度。

二、本书使用说明

1. 读者可根据自己的实际情况选做"走进考场"中的练习题(本省出的试题最好全做),若解题时思路受阻,可先回头看看本章节的"解法指导"中所介绍的解题方法,看能否从中受到启发;若还不行,再看看后面的"答案与提示"栏目。

2. 本书可作为高中一年级学生学习《数学必修(4)》和高中二年级理科学生学习《数学选修 2－1》时的教辅读物,更可作为高中三年级学生总复习学习《平面向量》和《空间向量》时的参考读物,也可作为教师的教学参考资料。编者相信,书中所总结出的解题方法对读者提高解题能力一定会有所帮助,因而本书不仅是广大学生的良师益友,也是教师的得力帮手。

本书编者对向量法解题情有独钟,并作了潜心研究,除对高考试题作研究外,还参阅了大量的数学资料,从中吸收了许多有用的东西。编者虽倾心尽力,但疏漏不妥之处在所难免,敬请广大读者和数学同行不吝指正。

愿此书伴随考生走进理想大学的校门!

赵南平

2009 年 3 月于福州

目录

第一篇　知识篇

第一章　平面向量 …… 3
　第一节　平面向量的概念与线性运算 …… 3
　第二节　平面向量的基本定理及坐标表示线段的定比分点 …… 11
　第三节　平面向量的数量积 …… 26
第二章　空间向量 …… 47
　第一节　空间向量的概念与运算 …… 47
　第二节　空间向量的坐标运算 …… 55
　第三节　平面的法向量 …… 69

第二篇　交汇篇

第三章　平面向量与代数的交汇 …… 75
第四章　平面向量与三角函数的交汇 …… 82
第五章　平面向量与解析几何的交汇 …… 96
第六章　平面向量与导数等其他知识的交汇 …… 132

第三篇　应用篇

第七章　平面向量的应用 …… 139
　第一节　向量法解平面几何题 …… 139
　第二节　向量法解代数题与向量平移 …… 155
　第三节　向量法解三角函数题 …… 169
　第四节　向量法解解析几何题 …… 181
　第五节　向量法解物理问题 …… 222

第八章　空间向量的应用……233
第一节　向量法证明空间中点、线、面间的位置关系问题……234
第二节　向量法求空间各种角……263
第三节　向量法求空间各种距离……291
第四节　向量法解立体几何中的条件探索型和存在性问题……318
第五节　向量法解立体几何中的求参数取值范围、最值、判断型等问题……339

第一篇

知识篇

本书所讲的“向量”既有同学们在高一《数学必修(4)》中所学的平面向量，又有在高二理科《数学选修 2－1》中所学的空间向量.

平面向量的基础知识包括：平面向量的概念与线性运算、平面向量的基本定理及坐标运算，平面向量的数量积等. 其中，向量运算的几何意义，两向量共线、垂直的充要条件，平面向量数量积的运算及应用是高考中常考的知识点.

空间向量的基础知识主要是空间向量的概念及运算. 其中，直线的方向向量，平面的法向量在空间向量的应用中常用到.

第一章　平面向量

第一节　平面向量的概念与线性运算

一、高考内容

(一)向量的概念

1. 向量　既有大小又有方向的量叫向量.

2. 有向线段　具有方向的线段叫有向线段. 通常在有向线段的终点处画上箭头表示它的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$,线段 AB 的长度也叫有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度,记作$|\overrightarrow{AB}|$. 有向线段包含三个要素:起点、方向、长度.

3. 向量的表示　向量常用一条有向线段来表示,有向线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向. 向量也可用字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 等表示,或用表示向量的有向线段的起点和终点字母表示.

4. 向量长　向量$\overrightarrow{AB}$的大小,也就是向量$\overrightarrow{AB}$的长度(或称模),记作$|\overrightarrow{AB}|$. 长度为 0 的向量叫零向量,记作 $\mathbf{0}$. 长度等于 1 个单位长度的向量,叫单位向量.

5. 平行向量　方向相同或相反的非零向量叫平行向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$. 我们规定 $\mathbf{0}$ 与任一向量平行.

6. 相等向量　长度相等且方向相同的向量叫相等向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

7. 共线向量　任一组平行向量都可平移到同一直线上,因此平行向量也叫共线向量.

(二)向量的加法与减法

1. 向量的加法.

(1)定义　已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 A,作$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{AC}$叫 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$(图 1.1),即 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$(称为向量

加法的三角形法则).

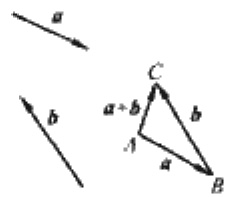


图 1.1

(2)运算律　向量的加法满足交换律与结合律,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(3)平行四边形法则　以同一点 A 为起点的两个已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作▱$ABCD$,则以 A 为起点的对角线 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.这种作两个向量和的方法叫向量加法的平行四边形法则.

2.向量的减法.

(1)相反向量　与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等、方向相反的向量叫 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量,记作 $-\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$ 互为相反向量.零向量的相反向量仍是零向量,于是 $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.任一向量与它的相反向量的和是零向量,即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.如果 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是互为相反的向量,那么 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$.

(2)减法定义　向量 $\boldsymbol{a}$ 加向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量,叫 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.求两个向量差的运算,叫向量的减法.

(3)差向量的作法　如图 1.2,已知 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量.

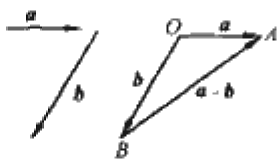


图 1.2

(三)实数与向量的积

1.向量的数乘　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量,这种运算叫向量的数乘,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的长度与方向规定如下:① $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;②当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

2.运算律　设 λ,μ 为实数,那么① $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;② $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;③ $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3.共线定理　向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线,当且仅当有且只有一个实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

二、高考要求

1.了解向量的实际背景,理解平面向量的概念,理解两个向量相等的含义,理解向量的几何表示.

2.掌握向量加法、减法的运算,并理解其几何意义.

3.掌握向量数乘的运算及其意义,理解两个向量共线的含义.

4.了解向量线性运算的性质及其几何意义.

三、解法指导

（一）牵涉到向量概念问题的解法

依据有关的向量概念来解.

例 1　如图 1.3，O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心.

(1)与 $\overrightarrow{OA}$ 相等的向量有哪些？

(2)与 $\overrightarrow{OA}$ 相反的向量有哪些？

(3)与 $\overrightarrow{OA}$ 共线的向量有哪些？

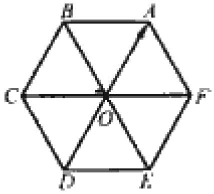


图 1.3

解　(1)有 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{EF}$；

(2)有 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{FE}$；

(3)有 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{EF}$；$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{FE}$；$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AD}$.

（二）向量的加法、减法运算

一般是依据相应的运算法则进行，但应注意如下的一些解题技巧：

1. 在作向量的加、减法运算时，为了利用求和的三角形法则或平行四边形法则，在求和且用三角形法则时，应使两向量首尾相接，在求和且用平行四边形法则及求差且用三角形法则时，应将两向量起点变成一样. 利用相反向量可进行加、减法的互换.

2. 在作多个向量的加法运算时，为了利用求和的多边形法则，应尽量将几个向量的首尾顺次相接，然后再相加. 若几个向量首尾相接能构成多边形，则它们的和为零向量.

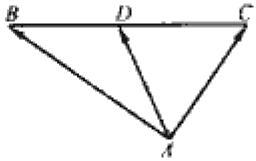


图 1.4

3. 当题设中有出现线段中点（或三角形中线）或对称的条件时，应考虑利用中点公式. 即如图 1.4，设 D 是线段 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$；$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.

例 2　在△ABC 中，点 D 是 BC 边上的中点，则 $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$　（　　）

A. $\overrightarrow{AD}$　　B. $3\overrightarrow{AD}$　　C. 0　　D. $2\overrightarrow{AD}$

解一　$3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$. 应选 D.

解二　原式 $=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$. 应选 D.

解三 原式 $=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\mathbf{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.应选 D.

例 3 如图 1.5,在正方形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,求作向量:(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

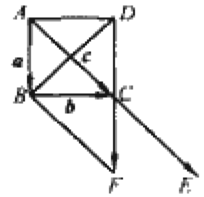


图 1.5

解 (1)由已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,又$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,所以延长 AC 到 E,使$|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{AC}|$,则$\overrightarrow{AE}$即为所求作的向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(2)由已知 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$,作 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}$,则 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(三)求实数与向量的积的方法

1.向量的加法、减法、实数与向量的积的混合运算称为向量的线性运算,也叫向量的初等运算,它的运算方法与代数中代数式的运算方法相同,要求合并同类项.

2.要注意向量及向量线性运算的几何意义的应用,对向量要注意从方向和长度两个方面去考虑,在解向量与平面几何、解析几何的综合问题时,要注意将向量的等式或不等式转化为几何元素间的位置关系,再利用几何知识来解.

例 4 [2007·全国卷Ⅱ理-(5),文-(6)]如图 1.6,在$\triangle ABC$ 中,已知 D 是 AB 边上一点,若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$,则 λ 等于 ( )

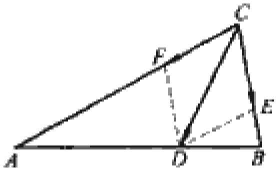


图 1.6

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

解 过点 D 作 $DE\parallel CA$ 交 BC 于 E,作 $DF\parallel BC$ 交 AC 于 F,则$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}$.由题意知$\frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{1}{2}$,所以$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$,则 $\lambda=\frac{2}{3}$,应选 A.

例 5 [2007·江西理二(15)]如图 1.7,在$\triangle ABC$ 中,点 O 是 BC 的中点,过点 O 的直线分别交直线 AB,AC 于不同的两点 M,N,若$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,则 $m+n$ 的值为______.

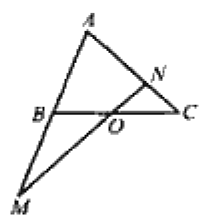


图 1.7

解一 (特殊值法)过点 O 的直线取为 BC,显然有$\overrightarrow{AB}=1\cdot\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}=1\cdot\overrightarrow{AC}$,即 $m=n=1$,所以 $m+n=2$,应填 2.

解二　因为点 O 为边 BC 的中点，所以$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. 因为$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，所以$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN})$. 因为三点 M,O,N 在一条直线上，所以$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$，即 $m+n=2$.

例 6　[2006·全国卷一理一(9)]设平面向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的和 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$，如果平面向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 满足 $|\boldsymbol{b}_i|=2|\boldsymbol{a}_i|$，且 $\boldsymbol{a}_i$ 顺时针旋转 $30°$后与 $\boldsymbol{b}_i$ 同向，其中 $i=1,2,3$. 则　　（　　）

A. $-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$　　　　B. $\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$

C. $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$　　　　D. $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$

解　(数形结合法)作△ABC，设其重心为 G，则$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{0}$，不妨设$\overrightarrow{GA}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{GB}=\boldsymbol{a}_2$，$\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{a}_3$，以重心 G 为中心将△ABC 顺时针旋转 $30°$后并将向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,3)$的模扩大为原来的 2 倍，可得△$A'B'C'$(图 1.8)，这时设三个新向量 $\boldsymbol{b}_1=\overrightarrow{GA'}$，$\boldsymbol{b}_2=\overrightarrow{GB'}$，$\boldsymbol{b}_3=\overrightarrow{GC'}$. 因为点 G 仍为△$A'B'C'$ 的重心，所以 $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$. 应选 D.

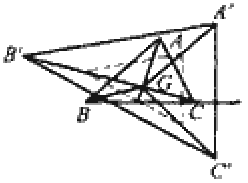


图 1.8

例 7　[2005·全国卷一理二(15)]△ABC 的外接圆的圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则实数 $m=$______.

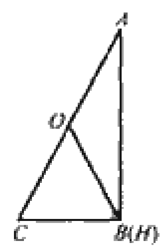


图 1.9

解一　(特殊值法)如图 1.9，当△ABC 为直角三角形时，O 为 AC 的中点，AB，BC 边上的高的交点 H 与 B 重合，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}$，所以 $m=1$.

解二　如图 1.10，取 BC 的中点 D，则$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，且 $OD\perp BC$，$AH\perp BC$，由$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$得$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=m(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD})$，所以$\overrightarrow{AH}=(m-1)\overrightarrow{OA}+2m\overrightarrow{OD}$，而$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+2m\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}$，即$0=(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+0$，所以 $m=1$.

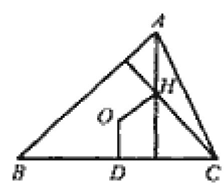


图 1.10

例 8　设 O 是△ABC 内部的一点，且$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，则△$ABC$ 和△OBC 的面积之比为　　（　　）

A. 3:2　　　B. 5:2　　　C. 4:1　　　D. 5:1

解　因为$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，所以$\overrightarrow{OA}=-2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. 如图 1.11，过 B 作 $BE/\!/OC$，过 C 作 $CE/\!/OB$. 联结 OE 交 BC 于 D. 因为 $OBEC$ 是平行四边形，所以 $OD=DE$，且$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OD}$. 所以$\overrightarrow{OA}=-4\overrightarrow{OD}$，即$|\overrightarrow{OA}|=$

$4|\overrightarrow{OD}|$. 设 A, O 到 BC 的距离分别是 h, h_1，则 $\frac{h_1}{h}=\frac{1}{5}$，又因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle OBC$ 同底，所以 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle OBC}}=5:1$，应选 D.

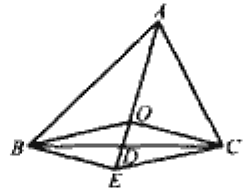


图 1.11

例 9 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，求证：$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

证一 如图 1.12，设 D, E, F 分别是 BC, CA, AB 的中点，则

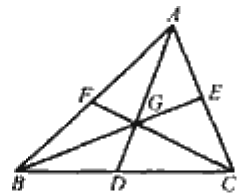


图 1.12

$$\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{BG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{CG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}&=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF})=\\&-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})\right]=\\&-\frac{1}{3}\left[(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB})\right]=\\&-\frac{1}{3}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

证二 设 A, B, C 分别对应向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$，重心 G 对应向量 $\boldsymbol{g}$，由三角形重心公式知 $\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$. 因为

$$\overrightarrow{GA}=\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}=\frac{2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{GB}=\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}=\frac{2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{3},\ \overrightarrow{GC}=\frac{2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{3}$$

所以

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\frac{2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{3}+\frac{2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{3}+\frac{2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{3}=\mathbf{0}$$

说明 此例是三角形重心的一条重要性质，在解题时常用到，其逆命题也成立.

(四)向量方程的解法

由于向量具有许多与整式相类似的运算性质(如：也可像多项式那样合并

"同类项"或去括号)，因此我们可以按照一元一次方程的解法来解关于向量的方程.

例 10　解关于向量 $\boldsymbol{x}$ 的方程：$2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x})=3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})$.

解　由已知 $2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{x}$，$5\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{x}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$.

(五)两向量共线充要条件的应用

1.已知条件中有(或要判定)两向量平行(或共线)时，要考虑利用两向量共线的充要条件来帮助解题.

2.求与一已知向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量时，采用待定系数法更为简单，即设所求向量为 $\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$，然后结合其他条件列出关于 λ 的方程，求出 λ 值后代入 $\lambda\boldsymbol{a}$ 即可得到欲求向量.

3.两向量共线的充要条件常用于解决三点共线问题：要证 A,B,C 三点共线，可证 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$.

注意　零向量与任一向量都共线，因此对于两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的问题，首先要考察其中没有零向量.

例 11　[2005·山东理一(7)，文一(8)]已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则一定共线的三点是　　(　　)

A. A,B,D　　B. A,B,C　　C. B,C,D　　D. A,C,D

解　因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})+(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{AB}$，所以 A,B,D 三点共线，应选 A.

例 12　求证：向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 的终点 A,B,C 共线的充要条件是存在实数 λ,μ，且 $\lambda+\mu=1$，使得 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.

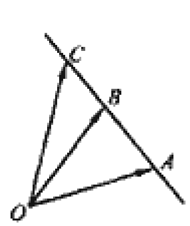


图 1.13

证明　(必要性)若向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 的终点共线(图 1.13)，则 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$，于是存在唯一的实数 m，使得 $\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{AB}$. 又 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，则有 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，$\overrightarrow{OC}=-m\overrightarrow{OA}+(1+m)\overrightarrow{OB}$. 令 $\lambda=-m$，$\mu=1+m$，则 $\lambda+\mu=1$，且 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.

(充分性)若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda+\mu=1$，则 $\mu=1-\lambda$，$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$，$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}$，所以 A,B,C 三点共线，即向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 的终点在同一直线上.

说明　此题的结论在解决点共线的问题时经常用到.

例 13　设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是任意的两个共线向量，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，判断向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线.

解 若 $e_1=e_2=\mathbf{0}$，则 $a=\mathbf{0}$，$b=\mathbf{0}$，a 与 b 共线；若 e_1,e_2 中至少有一个不是零向量，不妨设 $e_1\neq\mathbf{0}$，则 $e_2=\lambda e_1$，$a=(1-\lambda)e_1$，$b=2(1+\lambda)e_1$，这时 a 与 e_1 共线，b 与 e_1 共线，因为 $e_1\neq\mathbf{0}$，所以 a 与 b 共线. 综上，a 与 b 共线.

例 14 设两个非零向量 a 与 b 不共线，试确定实数 k，使 $ka+b$ 与 $a+kb$ 共线.

解 因为 $ka+b$ 与 $a+kb$ 共线，所以存在实数 λ，使得 $ka+b=\lambda(a+kb)$，即 $(k-\lambda)a=(\lambda k-1)b$. 因为 a,b 是不共线的非零向量，所以 $\begin{cases}k-\lambda=0\\ \lambda k-1=0\end{cases}$，解得 $k=\pm1$.

四、走进考场 1

1.［2008·海南理一(8)，文一(9)］平面向量 a,b 共线的充要条件是 （　　）

A. a,b 方向相同

B. a,b 两向量中至少有一个为零向量

C. 存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $b=\lambda a$

D. 存在不全为 0 的实数 λ_1,λ_2，使 $\lambda_1 a+\lambda_2 b=\mathbf{0}$

2.［2007·北京理一(4)］已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，D 为 BC 边中点，且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，那么 （　　）

A. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$　　B. $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$　　C. $\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$　　D. $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

3.［2007·上海文理二(13)］如图 1.14，平面内的两条相交直线 OP_1 和 OP_2 将该平面分割成四个部分Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ(不包括边界)，若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OP_1}+b\overrightarrow{OP_2}$，且点 P 落在第Ⅲ部分，则实数 a,b 满足 （　　）

A. $a>0,b>0$　　B. $a>0,b<0$　　C. $a<0,b>0$　　D. $a<0,b<0$

4.［2007·湖南文一(2)］若 O,E,F 是不共线的任意三点，则以下各式中成立的是 （　　）

A. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}$　　B. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$

C. $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}$　　D. $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$

5.［2006·上海文理二(13)］如图 1.15，在▱$ABCD$ 中，下列结论中错误的是 （　　）

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　　B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$　　D. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$

6.［2006·广东文理一(4)］如图 1.16，D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点，则向量 $\overrightarrow{CD}$ 可表示为 （　　）

A. $\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　B. $-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　C. $-\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　D. $\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

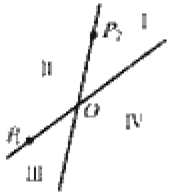


图 1.14

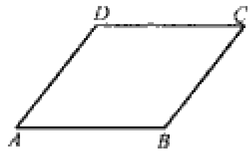


图 1.15

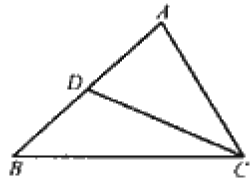


图 1.16

7. 下列命题正确的是　(　　)

A. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 也共线

B. 任意两个相等的非零向量的始点与终点是一平行四边形的四个顶点

C. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量

D. 有相同起点的两个非零向量不平行

五、答案与提示

1. D　提示：对 A：$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不一定同向；对 B：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不一定是零向量；对 C：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 不成立

2. A　3. B　4. B　5. C　6. B　7. C

第二节　平面向量的基本定理及坐标表示线段的定比分点

一、高考内容

(一)平面向量基本定理

如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 我们把不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫表示这一平面内所有向量的一组基底.

(二)向量夹角

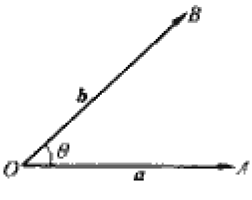


图 1.17

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB=\theta\ (0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ)$ 叫向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 1.17). 当 $\theta=0^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=180^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与

$\boldsymbol{b}$ 反向.如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 90°,我们就说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(三)平面向量的正交分解

把一个向量分解成两个互相垂直的向量,叫把向量正交分解.

(四)平面向量的坐标表示

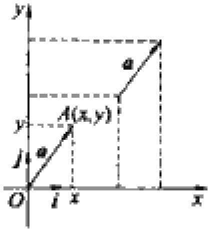


图 1.18

如图 1.18,在直角坐标系内,分别取与 x 轴,y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 作为基底.任作一个向量 $\boldsymbol{a}$,则有且只有一对实数 x,y,使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$,我们把 (x,y) 叫向量 $\boldsymbol{a}$ 的(直角)坐标,记作 $\boldsymbol{a}=(x,y)$(称为向量的坐标表示),其中 x 叫 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标,y 叫 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标.与 $\boldsymbol{a}$ 相等的向量的坐标也为 (x,y).显然,$\boldsymbol{i}=(1,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1)$,$O=(0,0)$.设 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$,则向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标 (x,y) 就是点 A 的坐标;反之也成立.因此,在平面直角坐标系内,每一个平面向量都可以用唯一一对实数表示.

(五)平面向量的坐标运算

1.和与差　设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$,即两个向量和与差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和与差.由此得到一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段终点的坐标减去始点的坐标,即设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

2.数乘向量　已知 $\boldsymbol{a}=(x,y)$ 和实数 λ,则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y)$,即实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标.

(六)平面向量共线的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则当且仅当 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 时,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 共线.

(七)线段的定比分点

设 P_1,P_2 是直线 l 上的两点,点 P 是 l 上不同于 P_1,P_2 的任意一点,则存在一个实数 λ,使 $\overrightarrow{P_1P_2}=\lambda\,\overrightarrow{PP_2}$,$\lambda$ 叫点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比.当点 P 在线段 P_1P_2 上时,$0\leqslant\lambda\leqslant1$(图 1.19(a));当点 P 在线段 P_1P_2 延长线上时,$\lambda<0$(图 1.19(b);当点 P 在线段 P_1P_2 反向延长线上时,$\lambda>1$(图 1.19(c)).

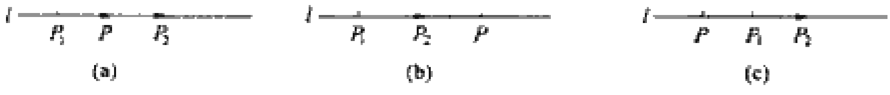


图 1.19

设 P_1, P, P_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x, y), (x_2, y_2)$，则 $\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$ 称为有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的定比分点坐标公式.

特别地，当 $\lambda = 1$，即点 P 是线段 P_1P_2 的中点时，即得有向线段 P_1P_2 的中点坐标公式 $\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$.

二、高考要求

1. 了解平面向量的基本定理及其意义.
2. 掌握平面向量的正交分解及其坐标表示.
3. 会用坐标表示平面向量的加法、减法与数乘运算.
4. 理解用坐标表示的平面向量共线的条件.

三、解法指导

（一）平面向量基本定理的应用

1. 平面向量基本定理主要是向量的合成与分解，常利用三点共线的条件及向量分解的唯一性，$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = k_1 e_1 + k_2 e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = k_1 \\ \lambda_2 = k_2 \end{cases}$，$\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ 来求一些字母的值. 解题时常将一个向量用两种方法来分解（其向量要相同），然后由系数相同得出方程组，再解方程组求出字母的值.

2. 遇向量分解求系数的问题常用数形结合法，并注意运用平行四边形法则帮助解题.

例 1 已知向量 e_1, e_2 是两个不平行的向量，$\overrightarrow{AD} = 3e_1 + 2e_2$，$\overrightarrow{CB} = e_1 + \lambda e_2$，$\overrightarrow{CD} = -2e_1 + e_2$，当 A, B, D 三点共线时，求实数 λ 的值.

解 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = -(e_1 + \lambda e_2) + (-2e_1 + e_2) = -3e_1 + (1-\lambda)e_2$. 因为 A, B, D 三点共线，所以 $\overrightarrow{AD} /\!/ \overrightarrow{BD}$，因此存在实数 k，使得 $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{BD}$，所以 $3e_1 + 2e_2 = k[-3e_1 + (1-\lambda)e_2] = -3ke_1 + (1-\lambda)ke_2$. 根据平面向量基本定理，得 $\begin{cases} 3 = -3k \\ 2 = k(1-\lambda) \end{cases}$，解得 $k = -1$，$\lambda = 3$，所以当 A, B, D 三点共线时，$\lambda = 3$.

例 2 如图 1.20，PQ 过$\triangle OAB$ 的重心 G，与边 OA、OB 分别交于 P，Q，设 $\overrightarrow{OP}=h\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OB}$. 求证：$h+k=3hk$.

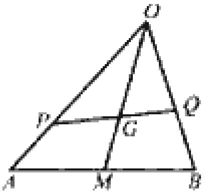


图 1.20

证明 设 $\overrightarrow{OG}=\lambda_1\overrightarrow{OP}+(1-\lambda_1)\overrightarrow{OQ}(\lambda_1\in\mathbf{R})$，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，因为 G 为$\triangle OAB$ 的重心，所以 $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，又 $\overrightarrow{OP}=h\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OB}$，所以

$\overrightarrow{OG}=\lambda_1 h\overrightarrow{OA}+(1-\lambda_1)k\overrightarrow{OB}$，于是 $\begin{cases}\lambda_1 h=\frac{1}{3}\\(1-\lambda_1)k=\frac{1}{3}\end{cases}$，消去 λ_1 得 $\frac{1}{3h}=1-\frac{1}{3k}=\frac{3k-1}{3k}$，即 $h+k=3hk$.

(二)用基底表示向量的方法

结合图形把要表示的向量放在含有基底的封闭多边形图形中，并注意利用向量的运算法则，综合运用向量的加法、减法，实数与向量的积等运算来表示，也可以用待定系数法求得，并且这种表示的结果是唯一的，要注意的是：平面向量的基底可以是平面内任意两个不共线的向量.

例 3 ［2008·广东理一(8)］如图 1.21，在▱$ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，E 是线段 OD 的中点，AE 的延长线与 CD 交于点 F，若 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AF}=$ ( )

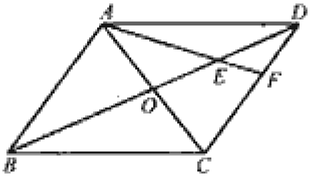


图 1.21

A. $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

解 因为 E 是 OD 的中点，所以 $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，又因为$\triangle ABE\backsim\triangle FDE$，所以 $\frac{AE}{EF}=\frac{BE}{DE}=\frac{3}{1}$，所以 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$，又因为 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$. 所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，应选 B.

例 4 ［2008·湖南理一(7)］如图 1.22，设 D，E，F 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 上的点，且 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ ( )

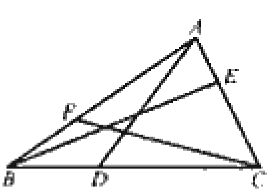


图 1.22

A. 反向平行　　　　B. 同向平行
C. 互相垂直　　　　D. 即不平行也不垂直

解　因为$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，所以$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$．因为$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA}$，所以$\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BE}$，则$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$．因为$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，所以$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，则$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$与$\overrightarrow{BC}$反向平行，应选 A．

***例 5**　[2006·湖南理二(15)]如图 1.23，$OM/\!/AB$，点 P 在由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的阴影区域内（不含边界）运动，且$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 x 的取值范围是______；当 $x=-\frac{1}{2}$时，y 的取值范围是______．

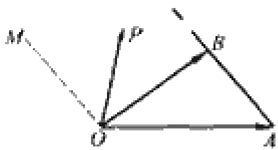


图 1.23

解　如图 1.24，由向量加法的几何意义知 $x<0$，所以 $x\in(-\infty,0)$．当 $x=-\frac{1}{2}$时，设$\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$．由 $CP/\!/OB$，知 P 在 OP 与 OM 的交点 P' 处时，$y=OE$ 最小．因为$\triangle COP'\backsim\triangle OAB$，所以$\frac{CP'}{OB}=\frac{OC}{OA}=\frac{1}{2}$，而 $CP'=OE$，所以 $OE=\frac{1}{2}OB$，则 $y=\frac{1}{2}$．

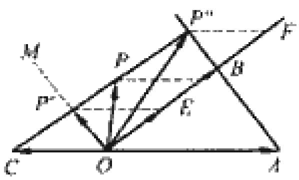


图 1.24

又知 P 在 OP 与 AB 延长线的交点 P'' 处时，$y=OF$ 最大．因为$\triangle BFP''\backsim\triangle BOA$，所以$\frac{BF}{OB}=\frac{P''F}{OA}=\frac{OC}{OA}=\frac{1}{2}$，$BF=\frac{1}{2}OB$，$OF=(1+\frac{1}{2})OB=\frac{3}{2}OB$，则 $y=\frac{3}{2}$．由于 P 不能在边界移动，故当 $x=-\frac{1}{2}$时，y 的取值范围为$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$．

例 6　如图 1.25，在$\triangle ABC$中，D，F 分别是 AB，AC 的中点，BF 与 CD 交于点 O，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AO}$．

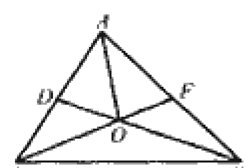


图 1.25

解　由于 D，O，C 三点共线，设$\overrightarrow{DO}=k_1\overrightarrow{DC}=k_1(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=-\frac{1}{2}k_1\boldsymbol{a}+k_1\boldsymbol{b}$．同理$\overrightarrow{BO}=k_2\overrightarrow{BF}=k_2(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB})=-k_2\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}k_2\boldsymbol{b}$．又$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO}=$

$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+(-\frac{1}{2}k_1\boldsymbol{a}+k_1\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}(1+k_1)\boldsymbol{a}+k_1\boldsymbol{b}$，则 $-k_2\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}k_2\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}(1+k_1)\boldsymbol{a}+k_1\boldsymbol{b}$，即 $\frac{1}{2}(1+k_1-2k_2)\boldsymbol{a}+(\frac{1}{2}k_2-k_1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，得 $\begin{cases}\frac{1}{2}(1+k_1-2k_2)=0\\ \frac{1}{2}k_2-k_1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k_1=\frac{1}{3}\\ k_2=\frac{2}{3}\end{cases}$，所以 $\overrightarrow{BO}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，故 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\boldsymbol{a}+(-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

例 7 如图 1.26，若点 L,M,N 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上的点，且 $\frac{BL}{BC}=l,\frac{CM}{CA}=m,\frac{AN}{AB}=n$. 当 $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{0}$ 时，求证：$l=m=n$.

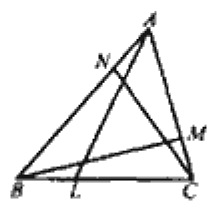


图 1.26

证明 取 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$ 为一组基底，由已知有 $\overrightarrow{BL}=l\boldsymbol{a},\overrightarrow{CM}=m\boldsymbol{b}$，因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AB}=-n\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=(l-1)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=-n\boldsymbol{a}+(1-n)\boldsymbol{b}$，把以上三式代入 $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{0}$，得 $(l-n)\boldsymbol{a}+(m-n)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，由平面向量基本定理得 $l-n=m-n=0$，所以 $l=m=n$.

（三）两向量的夹角

例 8 ［2007·陕西理二(15)，文二(16)］如图 1.27，平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$，其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120°，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30°，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$，若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda+\mu$ 的值为________.

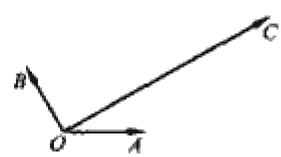


图 1.27

解 因为 $\angle AOB=120°,\angle AOC=30°$，所以 $\angle COB=90°$. 如图 1.28，作 ▱$OECF$，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$. 因为 $\angle OCE=\angle COB=90°$，$OC=2\sqrt{3}$，$\angle AOC=30°$，所以 $|\overrightarrow{OE}|=2\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=4=4\cdot|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{OF}|=|\overrightarrow{EC}|=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=2=2|\overrightarrow{OB}|$，则 $\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$，因此 $\lambda+\mu=6$.

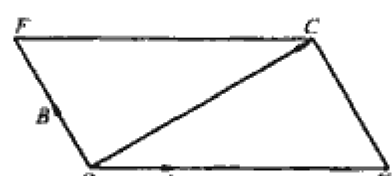


图 1.28

例 9 ［2001·上海春文、理一(8)］若非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 所成角的大小为________.

解　如图1.29，设$\overrightarrow{OA}=\alpha$，$\overrightarrow{OB}=\beta$，则$\alpha+\beta$表示平行四边形$OACB$的对角线$\overrightarrow{OC}$，$\alpha-\beta$表示另一条对角线$\overrightarrow{BA}$，由$|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$知这两条对角线长相等，因此▱$OACB$是矩形，即$OA\perp OB$，所以$\alpha$与$\beta$所成角为$90°$.

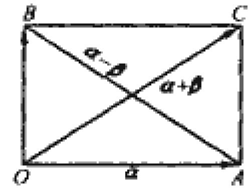


图1.29

（四）平面向量的坐标表示

引入了向量的坐标表示后，向量就有了两种表示方法：一种是几何法，即用向量的长度和方向表示；另一种是坐标法，即用一对有序实数表示．有了向量坐标法表示，就可以将几何问题转化为代数问题来处理．

注意　应把向量的坐标与点的坐标区别开来．只有始点在原点时，向量的坐标才与终点的坐标相等．向量相等时其坐标是相同的，而起点、终点的坐标可以不同．

例10　已知向量$a=(x+3,x^2-3x-4)$与$\overrightarrow{AB}$相等，其中$A(1,2)$，$B(3,2)$，求x.

解　因为$A(1,2)$，$B(3,2)$，所以$\overrightarrow{AB}=(2,0)$．又因为$a=\overrightarrow{AB}$，所以$(x+3,x^2-3x-4)=(2,0)$，则$\begin{cases}x+3=2\\x^2-3x-4=0\end{cases}$，解得$x=-1$.

（五）平面向量的坐标运算

1．一般按运算法则进行，要求点的坐标时常设出其坐标或转化为求向量（起点在原点）的坐标．

2．利用向量的坐标运算解题，经常是根据相等的向量坐标相同这一关系，通过列出方程（组）来求解．

例11　［2008·辽宁文—(5)］已知四边形$ABCD$的顶点$A(0,2)$，$B(-1,-2)$，$C(3,1)$，且$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$，则顶点$D$的坐标为　（　　）

A．$(2,\frac{7}{2})$　　B．$(2,-\frac{1}{2})$　　C．$(3,2)$　　D．$(1,3)$

解　因为$A(0,2)$，$B(-1,-2)$，$C(3,1)$，所以$\overrightarrow{BC}=(4,3)$．设$D(x,y)$，因为$\overrightarrow{AD}=(x,y-2)$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$，所以$(4,3)=(2x,2y-4)$，则$\begin{cases}2x=4\\2y-4=3\end{cases}$，解得$x=2,y=\frac{7}{2}$．应选A.

例12　［2006·山东理—(5)］设向量$a=(1,-3)$，$b=(-2,4)$，$c=(-1,-2)$，若表示向量$4a$，$4b-2c$，$2(a-c)$，d的有向线段首尾相接能构成四边形，则向量d为　（　　）

A. $(2,6)$　　B. $(-2,6)$　　C. $(2,-6)$　　D. $(-2,-6)$

解　由题设 $4\boldsymbol{a}+(4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{d}=-6\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}=(-6,18)-(-8,16)+(-4,-8)=(-2,-6)$，应选 D.

例 13　[2005·天津理二(14)]如图 1.30，在直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(-3,4)$，若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上且 $|\overrightarrow{OC}|=2$，则 $\overrightarrow{OC}=$______.

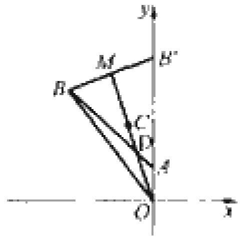


图 1.30

解一　设 $\angle AOB$ 的平分线交 AB 边于 D，因为 $\dfrac{|AD|}{|DB|}=\dfrac{|OA|}{|OB|}=\dfrac{1}{5}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{6}(-3,3)=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则 $D\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. 设 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OD}=\left(-\dfrac{1}{2}\lambda,\dfrac{3}{2}\lambda\right)$，由 $|\overrightarrow{OC}|=2$，得 $\dfrac{1}{4}\lambda^2+\dfrac{9}{4}\lambda^2=4$，$\lambda=\dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$，所以 $\overrightarrow{OC}=\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5},\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.

解二　点 B 关于 $\angle AOB$ 的平分线的对称点 B' 在边 OA（即 y 轴）上，由 $|OB|=5$ 知 $B'(0,5)$. 设 BB' 中点为 M，则 $M\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{2}\right)$ 在 $\angle AOB$ 的平分线上，设 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OM}=\left(-\dfrac{3}{2}\lambda,\dfrac{9}{2}\lambda\right)$，由 $|\overrightarrow{OC}|=2$ 得 $\dfrac{9}{4}\lambda^2+\dfrac{81}{4}\lambda^2=4$，$\lambda=\dfrac{4}{3\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{15}$，所以 $\overrightarrow{OC}=\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5},\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.

例 14　[2001·天津理一(5)]若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{c}=(-1,2)$，则 $\boldsymbol{c}$ 可表示为　　(　　)

A. $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$　　C. $\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$

解　设 $\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$，则 $(-1,2)=\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,-1)=(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1-\lambda_2)$，则 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=-1\\ \lambda_1-\lambda_2=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{1}{2}\\ \lambda_2=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$，应选 B.

例 15　若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是一组基底，向量 $\boldsymbol{\gamma}=x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}(x,y\in\mathbf{R})$，则称 (x,y) 为向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 下的坐标. 现已知向量 $\boldsymbol{a}$ 在基底 $\boldsymbol{p}=(1,-1)$，$\boldsymbol{q}=(2,1)$ 下的坐标为 $(-2,2)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在另一组基底 $\boldsymbol{m}=(-1,1)$，$\boldsymbol{n}=(1,2)$ 下的坐标为　　(　　)

A. $(2,0)$　　B. $(0,-2)$　　C. $(-2,0)$　　D. $(0,2)$

解　由已知 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}=-2(1,-1)+2(2,1)=(2,4)$，设 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{m}+$

$y\boldsymbol{n}$，则$(2,4)=x(-1,1)+y(1,2)=(y-x,x+2y)$，所以$\begin{cases}y-x=2\\x+2y=4\end{cases}$，则$\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$，应选 D.

例 16 已知点 $A(2,3)$，$B(5,4)$，$C(7,10)$，若$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in\mathbf{R})$. 当 λ 满足什么条件时(1)点 P 在第二、四象限的角平分线上？(2)点 P 在第三象限内？

解 设 $P(x,y)$，则$\overrightarrow{AP}=(x-2,y-3)$，$\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=(3,1)+\lambda(5,7)=(3+5\lambda,1+7\lambda)$. 由$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，得$\begin{cases}x-2=3+5\lambda\\y-3=1+7\lambda\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=5+5\lambda\\y=4+7\lambda\end{cases}$.

(1)若点 P 在第二、四象限的角平分线上，由 $y=-x$ 得 $4+7\lambda=-(5+5\lambda)$，解得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}$.

(2)若点 P 在第三象限内，由$\begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}$，得$\begin{cases}5+5\lambda<0\\4+7\lambda<0\end{cases}$，解得 $\lambda<-1$.

(六)向量共线的坐标表示

已知条件中有(或要判定)两向量平行(共线)时(要注意挖掘题目中的平行条件)，要考虑利用两向量共线的充要条件来帮助解题.

例 17 [2008·全国卷Ⅱ文理二(13)]设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}=(-4,-7)$ 共线，则 $\lambda=$______.

解 因为 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，所以 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\lambda,2\lambda)+(2,3)=(\lambda+2,2\lambda+3)$，因为向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}=(-4,-7)$ 共线，所以 $-7(\lambda+2)+4(2\lambda+3)=0$，解得 $\lambda=2$.

例 18 已知 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{a}\nparallel\boldsymbol{b}$. 求证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 不平行.

证一 (反证法)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$，所以$(x_1+x_2)\cdot(y_1-y_2)-(x_1-x_2)\cdot(y_1+y_2)=0$，即 $2(x_2y_1-x_1y_2)=0$，所以 $x_2y_1-x_1y_2=0$. 因为 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，所以$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，这与已知矛盾，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 不平行.

证二 设 O 为平面内任一点，过 O 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，并作▱$OACB$. 则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由于 OC，BA 是平行四边形的两条对角线，所以 OC 与 BA 相交，因此 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 不平行.

例 19 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点 A，B，C，D 的坐标依次是$(3,-1)$，$(1,2)$，$(-1,1)$，$(3,-5)$. 求证：四边形 $ABCD$ 是梯形.

证明 因为$\overrightarrow{AB}=(-2,3)$，$\overrightarrow{CD}=(4,-6)$，而 $-2\times(-6)-4\times3=0$，所以

$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$. 又因为 $\overrightarrow{AD}=(0,-4)$, $\overrightarrow{BC}=(-2,-1)$, 而 $0\times(-1)-(-2)\times(-4)\neq0$, 所以 $\overrightarrow{AD}\not\parallel\overrightarrow{BC}$. 因此四边形 $ABCD$ 是梯形.

例 20 已知平面内三点的坐标分别为 $A(-2,1)$, $B(-1,3)$, $C(3,4)$, 求点 D 的坐标, 使得这四个点构成平行四边形的四个顶点.

解 如图 1.31, 当平行四边形为 $ABCD_1$ 时, 设 $D_1(x_1,y_1)$, 因为 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$, $\overrightarrow{D_1C}=(3-x_1,4-y_1)$, 由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D_1C}$, 得 $(1,2)=(3-x_1,4-y_1)$, 所以 $\begin{cases}1=3-x_1\\2=4-y_1\end{cases}$, 则 $\begin{cases}x_1=2\\y_1=2\end{cases}$, 所以 $D_1(2,2)$.

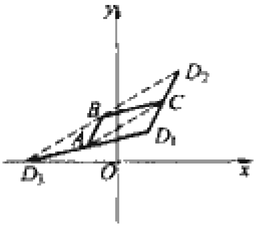


图 1.31

同理, 当平行四边形为 ACD_2B 时, 可得 $D_2(4,6)$; 当平行四边形为 $ACBD_3$ 时, 可得 $D_3(-6,0)$.

(七)利用向量证三点共线的方法

证三点共线的方法很多. 利用向量证三点共线, 可利用向量共线的充要条件, 即 A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$ (λ 为实数) 或 $\overrightarrow{OC}=(1-t)\cdot\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (这是直线的向量或方程) 或若 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$, 则 A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

注意 在利用共线向量定理证三点共线时, 必须选择有公共点的两个向量, 否则无法证明三点共线.

例 21 [2008·浙江理二(1)]已知 $a>0$, 若平面内三点 $A(1,-a)$, $B(2,a^2)$, $C(3,a^3)$ 共线, 则 $a=$ ______.

解 $\overrightarrow{AB}=(1,a^2+a)$, $\overrightarrow{AC}=(2,a^3+a)$, 因为 A, B, C 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$, 则 $a^3+a-2(a^2+a)=0$, 即 $a^3-2a^2-a=0$, 解得 $a=1+\sqrt{2}$ ($a=0$, $a=1-\sqrt{2}$ 不合).

***(八)线段的定比分点坐标公式的应用**

定比分点坐标公式中的两个式子, 分别只含有 P_1, P_2, P 的横坐标 x_1, x_2, x 和纵坐标 y_1, y_2, y, 故只要知道 x_1, x_2, x 或 y_1, y_2, y 中的一组即可求得 λ, 并且在每一个式子中只要知道三个量, 即可求出第四个量, 即"知三求一".

1. 求点的坐标使用时应注意以下几点

(1)必须分清谁是起点, 谁是终点, 谁是分点; 是内分, 还是外分;

(2)定比分点坐标公式在具体应用时非常灵活. 若能巧妙转换有向线段的起点、终点及分点的位置, 可使定比 λ 的取值简单(甚至就是一个正整数), 这样可简化计算.

(3)定比 λ 是两条有向线段$\overrightarrow{P_1P}$与$\overrightarrow{PP_2}$的数量之比，而不是长度之比.

(4)由点 P 分$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比为 λ 可得：$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$；若$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则 P_1，P_2，P 分别是起点、终点、分点.

例 22　如图 1.32，M 为线段 AB 所在直线上的一点，若$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$（实数 $\lambda\neq-1$），则对任一点 O，有 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

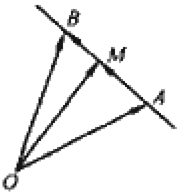


图 1.32

证一　如图 1.32，因为$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，而$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，所以$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$，$(\lambda+1)\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$，则$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

证二　因为$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}-\lambda\overrightarrow{OM}$，所以$(1+\lambda)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$，则$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

说明　由此式可推得解析几何中的定比分点公式.

2. 求定比 λ 的方法

(1)定义法：先求有向线段$\overrightarrow{P_1P}$和$\overrightarrow{PP_2}$的长度之比，再确定点 P 是内分点还是外分点，从而确定 λ 的符号.

(2)坐标法：逆用定比分点坐标公式可得 $\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$或$\lambda=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$，进而确定 λ 的值.

(3)向量法：利用向量的运算，确定$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$中的 λ.

例 23　[2008·重庆理一(7)]若过两点 $P_1(-1,2)$，$P_2(5,6)$的直线与 x 轴相交于点 P，则点 P 分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比 λ 的值为　　(　　)

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

解　直线 P_1P_2 的方程为$\dfrac{y-2}{6-2}=\dfrac{x+1}{5+1}$，令 $y=0$ 得 $x=-4$，所以 $P(-4,0)$. 由定比分点坐标公式得 $x_P=\dfrac{x_{P_1}+\lambda x_{P_2}}{1+\lambda}$，即 $-4=\dfrac{-1+\lambda\cdot5}{1+\lambda}$，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$，应选 A.

(九)线段的中点坐标公式的应用

除用于求中点坐标外，还要注意公式的逆用. 已知线段的一个端点和中点，可以求另一个端点. 利用中点坐标公式还可解决与两点的中点成中心对称的有关问题. 一般的，点 $A(a,b)$关于点(m,n)的中心对称点的坐标是

$B(2m-a,2n-b)$.

例 24 已知平行四边形的顶点 A 的坐标为 $(-2,1)$，一对边 AB，CD 的中点分别为 $M(3,0)$、$N(-1,-2)$，求▱$ABCD$ 的其余顶点的坐标.

解 如图 1.33，设 O 为对角线 AC，BD 的交点，易知 O 也是 MN 的中点，则 $\begin{cases}x_O=\dfrac{3+(-1)}{2}=1\\ y_O=\dfrac{0+(-2)}{2}=-1\end{cases}$，所以 O 为 $(1,-1)$.

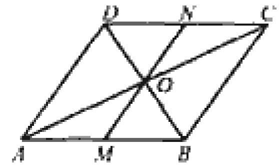


图 1.33

由 M 是 AB 中点得 $\begin{cases}x_M=\dfrac{-2+x_B}{2}=3\\ y_M=\dfrac{1+y_B}{2}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_B=2\times3+2=8\\ y_B=2\times0-1=-1\end{cases}$，所以 B 为 $(8,-1)$.

由 O 是 AC 中点得 $\begin{cases}x_O=\dfrac{-2+x_C}{2}=1\\ y_O=\dfrac{1+y_C}{2}=-1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_C=4\\ y_C=-3\end{cases}$，所以 C 为 $(4,-3)$.

由 N 是 CD 中点得 $\begin{cases}x_N=\dfrac{4+x_D}{2}=-1\\ y_N=\dfrac{-3+y_D}{2}=-2\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_D=-6\\ y_D=-1\end{cases}$，所以 D 为 $(-6,-1)$.

四、走进考场 2

1.［2008·全国卷Ⅰ理一(3)、文一(5)］在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}$ 可表示为 （　　）

A. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{5}{8}\boldsymbol{c}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$　　C. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

2.［2008·辽宁理一(5)］已知 O，A，B 是平面上的三个点，直线 AB 上有一点 C，满足 $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{0}$，则 $\overrightarrow{OC}=$ （　　）

A. $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$　　B. $-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

C. $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　　D. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

3.［2008·上海春文理二(13)］已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(3,\lambda)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 λ 等于 （　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. -2　　C. $-\frac{a}{2}$　　D. $-\frac{2}{3}$

4.[2008·广东文一(3)]已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,m)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 的坐标是　　(　　)

A. $(-2,-4)$　　B. $(-3,-6)$　　C. $(-4,-8)$　　D. $(-5,-10)$

5.[2008·安徽理一(3)]在▱$ABCD$ 中，AC 为一条对角线，若 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3)$，则 $\overrightarrow{BD}=$　　(　　)

A. $(-2,-4)$　　B. $(-3,-5)$　　C. $(3,5)$　　D. $(2,4)$

6.[2008·安徽文一(2)]若 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3)$，则 $\overrightarrow{BC}=$　　(　　)

A. $(1,1)$　　B. $(-1,-1)$　　C. $(3,7)$　　D. $(-3,-7)$

7.[2008·四川文一(3)]设平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,5)$，$\boldsymbol{b}=(-3,1)$，则 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=$　　(　　)

A. $(7,3)$　　B. $(7,7)$　　C. $(1,7)$　　D. $(1,3)$

8.[2008·重庆文一(4)]若点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 $-\frac{1}{3}$，则点 B 分有向线段 $\overrightarrow{PA}$ 所成的比是　　(　　)

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 3

9.[2007·宁夏·海南理一(2)、文一(4)]已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，则向量 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$ 等于　　(　　)

A. $(-2,-1)$　　B. $(-2,1)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(-1,2)$

10.[2006·安徽文理二(14)]如图 1.34，在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$，$M$ 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$ ________（用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示）.

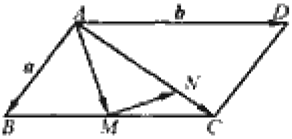


图 1.34

*11.[2006·湖南文一(10)]如图 1.35，$OM/\!/AB$，点 P 在由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的阴影区域内(不含边界)，且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则实数对 (x,y) 可以是　　(　　)

A. $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$　　B. $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$

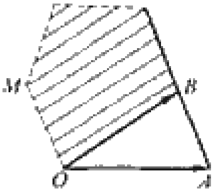


图 1.35

12.[2006·全国卷二文一(1)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,2)$，向量 $\boldsymbol{b}=(x,3)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $x=$　　(　　)

A. 9　　B. 6　　C. 5　　D. 3

13.[2006·北京文二(9)]若三点 $A(2,2)$,$B(a,0)$,$C(0,4)$共线,则 a 的值等于________.

14.[2006·山东文一(4)]设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,4)$,若表示向量 $4\boldsymbol{a}$,$3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 的有向线段首尾相接能构成三角形,则向量 $\boldsymbol{c}$ 为 ( )

A.$(1,-1)$ B.$(-1,1)$ C.$(-4,6)$ D.$(4,-6)$

15.[2006·北京理二(11)]若三点 $A(2,2)$,$B(a,0)$,$C(0,b)(ab\neq 0)$共线,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的值等于________.

16.[2005·全国卷二理一(8)]已知点 $A(\sqrt{3},1)$,$B(0,0)$,$C(\sqrt{3},0)$,设$\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E,那么有$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{CE}$,其中 λ 等于 ( )

A.2 B.$\frac{1}{2}$ C.-3 D.$-\frac{1}{3}$

17.[2005·全国卷二理一(10),文一(11)]点 P 在平面上作匀速直线运动,速度向量 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$(即点 P 的运动方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同,且每秒移动的距离为$|\boldsymbol{v}|$个单位),设开始时点 P 的坐标为$(-10,10)$,则 5 s 后点 P 的坐标为 ( )

A.$(-2,4)$ B.$(-30,25)$ C.$(10,-5)$ D.$(5,-10)$

18.[2005·全国卷三文理二(14)]已知向量$\overrightarrow{OA}=(k,12)$,$\overrightarrow{OB}=(4,5)$,$\overrightarrow{OC}=(-k,10)$,且 A,B,C 三点共线,则 $k=$________.

19.[2005·广东文理二(12)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$,$\boldsymbol{b}=(x,6)$,且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,则 $x=$________.

20.[2004·上海文一(6)]已知点 $A(-1,-5)$和向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$,若$\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{a}$,则点 B 的坐标为________.

21.[2001·天津理一(5)]若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,$\boldsymbol{c}=(-1,2)$,则 $\boldsymbol{c}$ 可表示为 ( )

A.$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$ B.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$ C.$\frac{3}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ D.$-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

22.[2001·天津文一(5)]若向量 $\boldsymbol{a}=(3,2)$,$\boldsymbol{b}=(0,-1)$,则向量 $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 的坐标是 ( )

A.$(3,-4)$ B.$(-3,4)$ C.$(3,4)$ D.$(-3,-4)$

五、答案与提示

1.A

2.A 提示:由已知 $2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0$

3.C

4.C 提示:$m=-4$

5. B　提示：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

6. B

7. A

8. A　提示：$\lambda=\dfrac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{BA}}$

9. D

10. $\dfrac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$　提示：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$，而$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$

11. C　提示(验证法)：因为 $x<0$，所以 A 错. 如图 1.36，当 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时，P 在射线 OM 上时(P')，y 最小. 由 $\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{CP'}{P'P''}=\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{2}{3}$ 知 $y=\dfrac{2}{3}$；P 在 AB 延长线上时(P'')，y 最大，由 $\dfrac{BF}{OB}=\dfrac{P''F}{OA}=\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{2}{3}$ 知 $y=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$，则 $y\in\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$，所以 B 错. 同理当 $x=-\dfrac{1}{4}$ 时，$y\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4}\right)$. 故 C 正确.

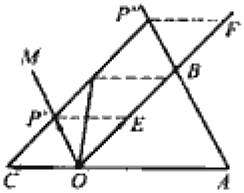


图 1.36

12. B

13. 4

14. D　提示：$4\boldsymbol{a}+(3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$

15. $\dfrac{1}{2}$　提示：$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$

16. C　提示：作出△ABC，如图 1.37，易见△ABC 是直角三角形，$\angle ABC=30°$，$\angle AEC=60°$，$CE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

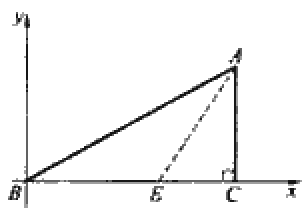


图 1.37

17. C　提示：设 5 s 后点 P 移动到 P'，则 $\overrightarrow{PP'}=5$

18. $-\dfrac{2}{3}$

19. 4

20. (5,4)　提示：设点 B 坐标为(x_B,y_B)

21. B

22. D

第三节　平面向量的数量积

一、高考内容

(一)数量积定义

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的夹角为 θ,我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.我们规定,零向量与任一向量的数量积为 0.

(二)数量积的几何意义

$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$(或 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$)叫向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上(或 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上)的投影.
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义:数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积.

(三)数量积的重要性质

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量,$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量,θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角,则

1. $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta$.

2. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

3. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.特别地,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

4. $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$.

5. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

(四)运算律

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律).

2. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\lambda\boldsymbol{b}$.

3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(五)平面向量数量积的坐标表示

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$,即两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和.由此得

1. 设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则 $|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.如果表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的起点和终点的坐标分别为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),那么 $|\boldsymbol{a}|=$

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，这就是平面内两点间的距离公式.

2. 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(六)两向量夹角公式

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

二、高考要求

1. 理解平面向量数量积的含义及其物理意义.

2. 了解平面向量的数量积与向量投影的关系.

3. 掌握数量积的坐标表达式，会进行平面向量数量积的运算.

4. 能运用数量积表示两个向量的夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.

三、解法指导

(一)平面向量的数量积的运算

依数量积定义和运算律进行. 由于向量的数量积运算可以像多项式乘多项式一样进行，因此有与乘法公式相类似的公式

$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$$

注意 数量积定义中两向量的夹角是指从一个向量的正方向出发逆时针旋转到另一个向量的正方向时所转过的角度.

例 1 [2008·江西文二(16)]如图 1.38，正六边形 $ABCDEF$ 中，有下列四个命题 ( )

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$

C. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$

D. $(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF})\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF})$

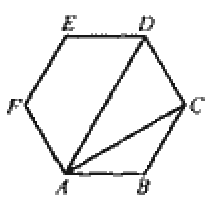


图 1.38

其中真命题的代号是______(写出所有真命题的代号).

解 在正六边形 $ABCDEF$ 中：$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FE}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$

$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$，故 A 正确.

$2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+2(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}$，故 B 正确.

因为$|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{AB}|$，且$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle=\frac{\pi}{3}$，所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{3}=|\overrightarrow{AB}|^2$. 又$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{AB}|^2=3|\overrightarrow{AB}|^2$，所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$，故 C 错误.

因为$(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF})\overrightarrow{EF}=[\overrightarrow{AD}\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})](-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=-\frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF})=\overrightarrow{AD}[(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})]=\overrightarrow{AD}(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})=-\frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}\overrightarrow{AD}$，所以$(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF})\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF})$，故 D 正确.

应填 A，B，D.

例 2 ［2007·重庆理一（10）］如图 1.39，在四边形 $ABCD$ 中，$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{DC}|=4$，$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{DC}|=4$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，则$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AC}$的值为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$

C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

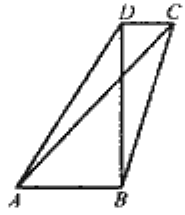


图 1.39

解　因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$，所以

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})=$$
$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}^2=$$
$$\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}^2=(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)^2 \quad ①$$

又
$$\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|+|\overrightarrow{BD}|=4\\(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)|\overrightarrow{BD}|=4\end{cases}$$

所以$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|=2$. 则式①的值为 4，应选 C.

（二）平面向量数量积的坐标运算

1. 依公式进行，并经常要先将未知向量的坐标设出来，然后根据题设或向量相等条件列出方程（组），再解方程（组）求出所设坐标.

2. 解题时常用$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$，计算 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上投影的数量.

3. 运算时常先将式子化简，然后再将向量坐标代入，这样会使求解过程简化.

例 3　[2007·湖北文—(9)]设 $\boldsymbol{a}=(4,3)$，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为$\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$\boldsymbol{b}$ 在 x 轴上的投影为 2，且 $|\boldsymbol{b}|\leqslant 14$，则 $\boldsymbol{b}$ 为　　（　　）

A. $(2,4)$　　B. $\left(2,-\frac{2}{7}\right)$　　C. $\left(-2,\frac{2}{7}\right)$　　D. $(2,8)$

解　因为 $\boldsymbol{b}$ 在 x 轴上的投影为 2，所以可设 $\boldsymbol{b}=(2,y)$. 又因为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为$\frac{5\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{(4,3)\cdot(2,y)}{\sqrt{4+y^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$\frac{8+3y}{\sqrt{4+y^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，解得 $y=14$ 或 $-\frac{2}{7}$. 又因为 $|\boldsymbol{b}|\leqslant 14$，所以 $y=-\frac{2}{7}$，则 $\boldsymbol{b}=\left(2,-\frac{2}{7}\right)$，应选 B.

例 4　[2006·湖北理—(1)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}$ 是不平行于 x 轴的单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{b}=$　　（　　）

A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$　　D. $(1,0)$

解一　设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}$，得$\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}$. 又由 $|\boldsymbol{b}|=1$ 得 $x^2+y^2=1$. 解$\begin{cases}\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}\\x^2+y^2=1\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，应选 B.

解二　（验证法）验证 A：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\neq\sqrt{3}$，排除 A；验证 B：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，应选 B.

例 5　[2006·辽宁理—(12)]设 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$. 点 P 是线段 AB 上的一个动点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，则实数 λ 的取值范围是　　（　　）

A. $\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$　　B. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$

C. $\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

解　设 $P=(x,y)$，则由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$得 $(x-1,y)=\lambda(-1,1)\ (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$. 所以 $x=1-\lambda$，$y=\lambda$，则 $P=(1-\lambda,\lambda)$. 又由$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$得 $(1-\lambda,\lambda)\cdot(-1,1)\geqslant(\lambda,-\lambda)\cdot(\lambda-1,1-\lambda)$，整理得 $2\lambda^2-4\lambda+1\leqslant 0$，解得 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又因为 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，所以 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$，应选 B.

例 6 若将向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$ 绕原点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到向量 $\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标.

解 设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$，由已知得 $\begin{cases}|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 45^\circ\end{cases}$，代入坐标得 $\begin{cases}x^2+y^2=2^2+1^2\\ 2x+y=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=\frac{2\sqrt{2}}{2}\\ y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$. 由图 1.40 知，第二组解不符合逆时针旋转的条件，故舍去，所以 $\boldsymbol{b}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

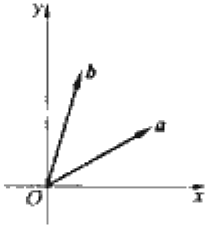


图 1.40

（三）平面向量数量积的应用

运用两个向量数量积的坐标表示，可方便地解决求向量长、两向量夹角及两条直线平行、垂直等方面的问题，特别是判断两向量对应的两条直线是否垂直，显得特别方便.

1. 求向量长的方法

(1)要求向量的长时，常转化为去求该向量自乘的数量积，即 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(2)若两向量($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$)的长相等，常转化为它们的数量积相等(即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$).

(3)已知 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$(或 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$)，可逆用 $|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\pm 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$ 来求得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 因此，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 四个量中，已知其中的三个量可求第四个量.

例 7 [2008·江苏文理一(5)] $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=3$，则 $|5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

解 $|5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=25\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-10\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=25\times 1^2+3^2-10\times 1\times 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=49$，所以 $|5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=7$.

例 8 [2008·天津文二(14)]已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{c}|=$________.

解 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2+8=6$，所以 $\boldsymbol{c}=(2,4)-(-6,12)=(8,-8)$，则 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2\times 8^2}=8\sqrt{2}$.

例 9 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，且 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$. 是否存在满足上述条件的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，使得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$？说明理由.

解 假设存在符合题意的向量 a、b，使得 $|a+b|=2|a-b|$ 成立，则 $|a+b|^2=4|a-b|^2$，即 $a^2+2a\cdot b+b^2=4(a^2-2a\cdot b+b^2)$，所以 $3a^2-10a\cdot b+3b^2=0$，即 $3|a|^2-10|a||b|\cos 60^\circ+3|b|^2=0$，所以 $3|a|^2-5|a||b|+3|b|^2=0$。因为 $|b|\neq 0$，所以 $3\left(\frac{|a|}{|b|}\right)^2-5\frac{|a|}{|b|}+3=0$。注意到 $\frac{|a|}{|b|}$ 为实数，而上述方程无实数解，所以这样的向量 a，b 不存在。

2.求两向量夹角的方法

要求两向量的夹角，可先求夹角的余弦值：$\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a||b|}$，然后再求角。

注意若 $\cos\theta>0$，则 θ 为锐角或 $\theta=0^\circ$（两向量同向）；若 $\cos\theta<0$，则 θ 为钝角或 $\theta=180^\circ$（两向量反向）。

例 10 ［2008·陕西文·理二(15)］关于平面向量 a，b，c，有下列三个命题：①若 $a\cdot b=a\cdot c$，则 $b=c$；②若 $a=(1,k)$，$b=(-2,6)$，$a/\!/b$，则 $k=-3$；③非零向量 a 和 b 满足 $|a|=|b|=|a-b|$，则 a 与 $a+b$ 的夹角为 60°。其中真命题的序号为______（写出所有真命题的序号）。

解 ①由 $a\cdot b=a\cdot c$ 得 $|a||b|\cos\langle a,b\rangle=|a||c|\cos\langle a,c\rangle$ 得不到 $b=c$，错误。

②由 $a=(1,k)$，$b=(-2,6)$，$a/\!/b$ 得 $1\times 6-k(-2)=0$，所以 $k=-3$，正确。

③**解一** 设 $|a|=|b|=|a-b|=m(m>0)$，则有 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=m^2$，所以 $2a\cdot b=m^2$，$a\cdot(a+b)=a^2+ab=m^2+\frac{m^2}{2}=\frac{3m^2}{2}$，$(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2=m^2+m^2+m^2=3m^2$，所以 $\cos\langle a,a+b\rangle=\frac{a\cdot(a+b)}{|a||a+b|}=\frac{\frac{3}{2}m^2}{m\sqrt{3}m}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\langle a,a+b\rangle=30^\circ$，所以③错误。因此，应填②。

解二 （数形结合法）如图 1.41，构造菱形 $ABCD$，且 $\angle DAB=60^\circ$，并设 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，则 $\overrightarrow{DB}=a-b$，$\overrightarrow{AC}=a+b$，满足 $|a|=|b|=|a-b|$。由平行四边形性质知 $\angle CAB=30^\circ$，所以 a 与 $a+b$ 的夹角为 30°，所以③错误。

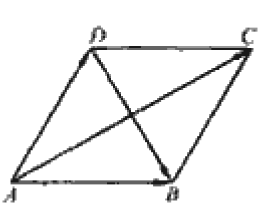


图 1.41

解三 设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$。因为 $|a|=|b|$，所以 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$。由 $|b|=|a-b|$ 得 x_1x_2+

$y_1y_2=\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)$．由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=2(x_1^2+y_1^2)+2\times\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)=3(x_1^2+y_1^2)$ 得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}\times\sqrt{x_1^2+y_1^2}$．设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{(x_1^2+y_1^2)+\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\theta=30°$，故③错．

例 11　[2006·重庆理一(7)]与向量 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$ 的夹角相等，且模为 1 的向量是　　　(　　)

A．$\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$　　B．$\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

C．$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\right)$　　D．$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 或 $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\right)$

解　设所求向量为 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，因 $|\boldsymbol{a}|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$|\boldsymbol{c}|=1$，则 $\dfrac{\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}y}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}y}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$，即 $7x+y=x-7y$，$x=-\frac{4}{3}y$．代入 $x^2+y^2=1$，解得 $y=\pm\frac{3}{5}$，所以 $x=\mp\frac{4}{5}$，则 $\boldsymbol{c}=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ 或 $\boldsymbol{c}=\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$．应选 B．

例 12　[2006·湖南理一(5)]已知 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|\neq0$，且关于 x 的方程 $x^2+|\boldsymbol{a}|x+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 有实根，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的取值范围是　　　(　　)

A．$[0,\frac{\pi}{6}]$　　B．$[\frac{\pi}{3},\pi]$　　C．$[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$　　D．$[\frac{\pi}{6},\pi]$

解　因为方程 $x^2+|\boldsymbol{a}|x+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 有实根，所以 $\Delta=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant0$，则 $|\boldsymbol{a}|^2\geqslant4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．设 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\theta$，$|\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|$，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\leqslant\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\frac{1}{2}$．由于 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta\in[\frac{\pi}{3},\pi]$，应选 B．

例 13　已知 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 是互相垂直的两个单位向量，$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$．

(1)求向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(2)对非零向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$，如果存在不为零的常数 α,β，使 $\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$，那么称向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 是线性相关的，否则称向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 是线性无关的．向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是线性相关还是线性无关的？为什么？

解 (1)$b=(a+b)-a=i+j$,设 a 与 b 夹角为θ,则 $\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{(3i-4j)\cdot(i+j)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3i^2-i\cdot j-4j^2}{5\sqrt{2}}=\frac{3-4}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$,故夹角 $\theta=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$.

(2)设存在常数 α,β,使得 $\alpha a+\beta b=0$,得$(3\alpha+\beta)i+(\beta-4\alpha)j=0$,则 $\begin{cases}3\alpha+\beta=0\\-4\alpha+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$,所以不存在非零常数 α,β 使得 $\alpha a+\beta b=0$ 成立,故 a 与 b 线性无关,得$(3\alpha+\beta)i+(\beta-4\alpha)j=0$.

例 14 已知$|a|=\sqrt{2}$,$|b|=3$,a 与 b 的夹角为 45°,求使向量 $a+\lambda b$ 与 $\lambda a+b$ 的夹角为锐角的λ 的取值范围.

解 设 $c=a+\lambda b$,$d=\lambda a+b$ 的夹角为θ,则 $\cos\theta=\frac{c\cdot d}{|c||d|}$.因为 θ 为锐角,所以 $\cos\theta>0$,则 $c\cdot d>0$.即$(a+\lambda b)\cdot(\lambda a+b)>0$,$\lambda a^2+(\lambda^2+1)a\cdot b+\lambda b^2>0$.因为 $a^2=|a|^2=2$,$b^2=|b|^2=9$,$a\cdot b=\sqrt{2}\times3\times\cos45°=3$.所以 $2\lambda+3(\lambda^2+1)+9\lambda>0$,$3\lambda^2+11\lambda+3>0$,$\lambda<\frac{-11-\sqrt{85}}{6}$或 $\lambda>\frac{-11+\sqrt{85}}{6}$.

但当 $\lambda=1$ 时,$c=a+d$ 与 $d=a+b$ 共线,其夹角为 0°,所以 $\lambda=1$ 应舍去,因此所求 λ 的取值范围为$\lambda<\frac{-11-\sqrt{85}}{6}$或 $\lambda>\frac{-11+\sqrt{85}}{6}$且 $\lambda\neq1$.

例 15 对于两个非零向量 a,b,求使$|a+tb|$最小时的 t 值,并求此时 b 与$a+tb$ 的夹角.

解 $|a+tb|^2=a^2+2t(a\cdot b)+t^2b^2=|b|^2(t+\frac{a\cdot b}{|b|^2})^2+|a|^2-\frac{(a\cdot b)^2}{|b|^2}$.当 $t=-\frac{a\cdot b}{|b|^2}$时,$|a+tb|^2$ 取得最小值,即$|a+tb|$取得最小值.此时,$b\cdot(a+tb)=b\cdot(a-\frac{a\cdot b}{|b|^2}b)=a\cdot b-\frac{a\cdot b}{|b|^2}b^2=a\cdot b-a\cdot b=0$.又因为 $b\neq0$,$a+tb\neq0$,所以 $b\perp(a+tb)$,即 b 与$a+tb$ 的夹角为 90°.

3.证两向量共线

解决两向量共线问题,除可利用向量共线定理外,还可利用向量数量积 $a\cdot b=\pm|a||b|$,此时非零向量 a 与 b 所成的角为 0°或 180°,所以 $a/\!/b$.

例 16 若 $a/\!/b$,证明:$(a+b)^2(a-b)^2=(a^2-b^2)^2$.问:它的逆命题是否成立,为什么?

证明 因为 $a/\!/b$,所以不妨设存在实数 λ,使 $a=\lambda b$,将其代入,得:左边$=(\lambda b+b)^2(\lambda b-b)^2=(1+\lambda)^2b^2(1-\lambda)^2b^2=(1-\lambda^2)^2b^4$,右边$=(\lambda^2b^2-b^2)^2=[(\lambda^2-1)b^2]^2=(\lambda^2-1)^2b^4=(1-\lambda^2)^2b^4$.所以,左边$=$右边,即

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2)^2$.

反过来若$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2)^2$，即$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]^2$，两边开平方得$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\pm|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. 当$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$所成的角为0°或180°，即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 不妨设存在实数$\mu$，使$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以$(\mu+1)\boldsymbol{b}=(\mu-1)\boldsymbol{a}$. 当$\mu\neq1$时，$\boldsymbol{a}=\frac{\mu+1}{\mu-1}\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；当$\mu=1$时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

若$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}=\pm\boldsymbol{b}$，显然$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 综上，原命题的逆命题成立.

(四)两向量垂直条件的应用

已知条件中有(或要判定)两向量垂直(或成直角)时(要注意挖掘题目中的垂直条件)，要考虑利用两向量垂直的充要条件来帮助解题.

例17 [2006·浙江理二(13)]设向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，若$|\boldsymbol{a}|=1$，则$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2$的值是________.

解 由已知得$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot[-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]=\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2=0$，则$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|=1$. 又因为$|\boldsymbol{c}|^2=[-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，而由$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以$|\boldsymbol{c}|^2=1^2+1^2=2$，因此$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2=1+1+2=4$.

例18 [2006·福建理一(11)]已知$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点$C$在$\angle AOB$内，且$\angle AOC=30°$，设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in\mathbf{R})$，则$\frac{m}{n}$等于 ( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

解一 由已知得$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$的夹角为30°，所以有$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times|m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}|\times\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{m^2(\overrightarrow{OA})^2+2mn\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+n^2(\overrightarrow{OB})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{m^2+3n^2}$. 又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})=m|\overrightarrow{OA}|^2=m$. 所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{m^2+3n^2}=m$，$\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}n^2=m^2$，则$m=3n$，所以$\frac{m}{n}=3$，应选B.

解二 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{OC}|$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OA}^2+n\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=m$，所以$m=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{OC}|$. 同理$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OB}|\cos60°=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{OC}|$.

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OB}^2=3n$，所以 $3n=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$，

则 $m=3n$，所以 $\frac{m}{n}=3$，应选 B.

解三　（数形结合法）如图 1.42，作 Rt△AOB，由 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$ 知 $\angle OAB=60°$，由 $\angle AOC=30°$ 知 $\angle ADO=90°$. 过 C 作 $CE\perp OA$ 于 E，过 C 作 $CF\perp OB$ 于 F，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$. 设 $\frac{|\overrightarrow{OE}|}{|\overrightarrow{OA}|}=m$，则 $|\overrightarrow{OE}|=m$，$\overrightarrow{OE}=m\overrightarrow{OA}$. 又设 $n=\frac{|\overrightarrow{OF}|}{|\overrightarrow{OB}|}=\frac{|\overrightarrow{OE}|\tan 30°}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}m$，$\overrightarrow{OF}=n\overrightarrow{OB}$，所以 $\frac{m}{n}=3$，应选 B.

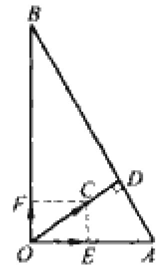


图 1.42

例 19　[2005·浙江理一(10)]已知向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}$，$|\boldsymbol{e}|=1$ 满足对于任意 $t\in\mathbf{R}$，恒有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，则　　(　　)

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}$　　B. $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

C. $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$　　D. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

解　由 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$ 得 $(\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e})^2\geqslant(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})^2$，$t^2-2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1\geqslant0$，对任意 $t\in\mathbf{R}$ 均成立，所以 $\Delta=4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})^2-4(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)=4(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)^2\leqslant0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=1$. 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}^2=0$，即 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e}=0$，所以 $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$. 应选 C.

例 20　[2007·上海理一(14)]直角坐标系 xOy 中，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别是与 x,y 轴正方向同向的单位向量，在 Rt△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AC}=3\boldsymbol{i}+k\boldsymbol{j}$，则 k 的可能值个数是　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解　如图 1.43，设 C 坐标为 $(3,k)$. 当 $AB\perp BC$ 时，因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(3\boldsymbol{i}+k\boldsymbol{j})-(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=(1,k-1)$，所以 $2\times1+(k-1)\times1=0$，则 $k=-1$；当 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ 时，因为 $\overrightarrow{AC}=(3,k)$，所以 $2\times3+k=0$，则 $k=-6$. 当 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ 时有 $3\times1+k(k-1)=0$，即 $k^2-k+3=0$. 此方程无实数解，故这种情况不存在. 综合知，k 共有两个可能值，应选 B.

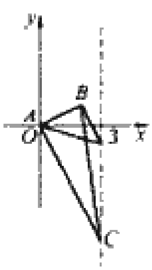


图 1.43

例 21　[2007·重庆文一(9)]已知向量 $\overrightarrow{OA}=(4,6)$，$\overrightarrow{OB}=(3,5)$，且 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{OB}$，则向量 $\overrightarrow{OC}$ 等于　　(　　)

A. $(-\frac{3}{7},\frac{2}{7})$　　B. $(-\frac{2}{7},\frac{4}{21})$　　C. $(\frac{3}{7},-\frac{2}{7})$　　D. $(\frac{2}{7},-\frac{4}{21})$

解　设 $C(x,y)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ 有 $4x+6y=0$①，由 $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{OB}$ 有 $(x-4,y-6)=\lambda(3,5)$，即 $5(x-4)-3(y-6)=0$②，由①、②可得 $C(\frac{2}{7},-\frac{4}{21})$，应选 D.

例 22 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 互相垂直，求证：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

证明 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{a}^2=2\boldsymbol{b}^2$①，又 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$（否则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，这与已知矛盾），且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 互相垂直，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，即 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$，把①代入得 $2\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

（四）判定三角形或多边形形状的方法

1. 三角形形状的判定，常从夹角和边长两方面进行.

(1)要判定一个三角形是等腰三角形，可转化为求向量长的问题.

(2)要判定一个三角形是锐角（或钝角）三角形，可转化为向量数量积来处理. 即非零不共线两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；非零不共线两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$.

(3)要判定一个三角形是否是直角三角形，还可以利用勾股定理的逆定理.

2. 四边形形状的判定，常从平行与垂直的位置关系以及边长是否相等来考虑，而要判定多边形的某两边是否平行或成直角，可转化为两向量平行或垂直的问题.

注意 (1)在求解三角形、四边形问题时要注意利用如下的隐含条件：几何封闭图形的向量和为零向量，即多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\boldsymbol{0}$.

(2)若给出几个顶点的坐标，要判断图形的形状，且题型又是选择题或填空题，还可采用作出图形的方法来判断.

例 23 ［2006·陕西理一(9)、文一(8)］已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$，则 $\triangle ABC$ 为 （　　）

A. 等边三角形　　　　B. 直角三角形

C. 等腰非等边三角形　　　　D. 三边均不相等的三角形

解 如图 1.44，设 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\overrightarrow{AB'}$，$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AD'}$. 因为 $|\overrightarrow{AB'}|=1$，$|\overrightarrow{AC'}|=1$，所以 $AB'D'C'$ 是菱形，则 AD' 为 $\angle BAC$ 的平分线. 由 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 知 $\angle BAC$ 的平分线与 BC 边垂直，所以 $|\overrightarrow{AB}|=$

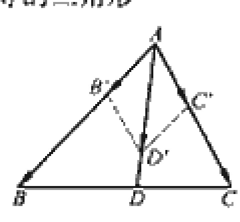


图 1.44

$|\overrightarrow{AC}|$. 又因为 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=1\times1\times\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，所以 $\angle BAC=60°$，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形，应选 A.

例 24　四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{d}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}$，判断四边形 $ABCD$ 是什么图形.

解一　因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\mathbf{0}$. 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^2$，即 $|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}+|\boldsymbol{d}|^2$，所以 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{d}|^2$，同理可得 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{d}|^2=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2$. 两式相减得 $|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{d}|^2=|\boldsymbol{d}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$，所以 $|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{d}|^2$，则 $|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{c}|^2$，即 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{d}|$. 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，即 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{c}$. 又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot(-\boldsymbol{a})$，$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$. 所以四边形 $ABCD$ 为矩形.

解二　因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，所以 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$. 同理 $\boldsymbol{d}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{d}$，同理 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$. 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 同解一得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

例 25　[2005·湖南文一(9)] P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则 P 是 $\triangle ABC$ 的　　(　　)

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

解　由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 可得 $\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，所以 $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$. 同理，由 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，得 $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{CB}$. 所以 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心，应选 D.

注意　2005·全国卷一文一(12)与本题基本一样.

例 26　已知 A，B，C 是坐标平面上的三点，其坐标分别为 $A(1,2)$，$B(4,1)$，$C(0,-1)$，则 $\triangle ABC$ 的形状为　　(　　)

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等腰直角三角形　　D. A、B、C 均不正确

解一　$|AB|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，$|AC|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$|BC|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$，因为 $|AB|=|AC|$，$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，应选 C.

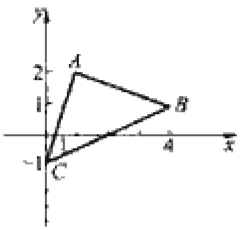


图 1.45

解二　(图象法)在平面直角坐标系中作出 $\triangle ABC$ 的图形(图 1.45)，易见应选 C.

解三　因为 $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,-3)$，所以

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{10}$，则△$ABC$ 是等腰三角形．又因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-1)+(-1)\times(-3)=0$，所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，即$\angle A=90°$．所以△$ABC$ 是等腰直角三角形，应选 C.

例 27　已知 $A(1,2)$，$B(4,0)$，$C(8,6)$，$D(5,8)$四点，则四边形 $ABCD$ 是　（　　）

A. 梯形　　B. 矩形　　C. 菱形　　D. 正方形

解一　因为$\overrightarrow{AB}=(4,0)-(1,2)=(3,-2)$，$\overrightarrow{DC}=(8,6)-(5,8)=(3,-2)$，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则 $ABCD$ 为平行四边形．因为$\overrightarrow{AD}=(5,8)-(1,2)=(4,6)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=3\times4+(-2)\times6=0$，所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，则 $ABCD$ 为矩形．因为$\overrightarrow{AC}=(8,6)-(1,2)=(7,4)$，$\overrightarrow{BD}=(5,8)-(4,0)=(1,8)$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=7\times1+4\times8\neq0$，所以$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$不垂直，则 $ABCD$ 不是菱形，也不可能是正方形．应选 B.

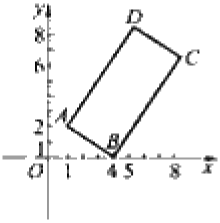


图 1.46

解二　（图象法）在平面直角坐标系中作出四边形 $ABCD$ 的形状如图 1.46 所示，应选 B.

四、走进考场 3

1.［2008·海南文一(5)］已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$，$\boldsymbol{b}=(4,-2)$，$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则 $\lambda=$　（　　）

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

2.［2008·北京理二(10)、文二(11)］已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=4$，那么

［理科］$\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$的值为＿＿＿＿．

［文科］$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值为＿＿＿＿．

3.［2008·天津理二(14)］如图 1.47，在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,2)$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$＿＿＿＿．

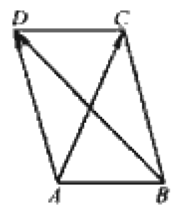


图 1.47

4.［2008·上海文、理一(5)］若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$＿＿＿＿．

5.［2008·湖北文、理一(1)］设 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{c}=(3,2)$，则$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$　（　　）

A. $(-15,12)$　　B. 0　　C. -3　　D. -11

6.［2008·湖南文二(11)］已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(-2,0)$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$＿＿＿＿．

7. [2008·江西理二(13)]直角坐标平面内三点 $A(1,2)$，$B(3,-2)$，$C(9,7)$. 若 E，F 为线段 BC 的三等分点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$ ______.

8. [2007·全国卷Ⅰ文理一(3)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$，$\boldsymbol{b}=(6,5)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ (　　)

A. 垂直　　B. 不垂直也不平行

C. 平行且同向　　D. 平行且反向

9. [2007·天津理二(15)]如图 1.48，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120^\circ$，$AB=2$，$AC=1$，D 是边 BC 上一点，$DC=2BD$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$ ______.

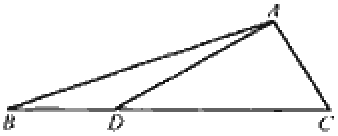


图 1.48

10. [2007·四川理一(7)、文一(8)]设 $A(a,1)$，$B(2,b)$，$C(4,5)$ 为坐标平面上三点，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 方向上的投影相同，则 a 与 b 满足的关系式为 (　　)

A. $4a-5b=3$　　B. $5a-4b=3$　　C. $4a+5b=14$　　D. $5a+4b=14$

11. [2007·辽宁理一(3)、文一(4)]若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$，且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\right)\boldsymbol{b}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 (　　)

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

12. [2007·福建理一(4)、文一(8)]对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，下列命题中真命题是 (　　)

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$　　B. 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

C. 若 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$　　D. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

13. [2007·山东理一(11)]在 Rt$\triangle ACB$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，则下列等式不成立的是 (　　)

A. $|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$　　B. $|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

C. $|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$　　D. $|\overrightarrow{CD}|^2=\dfrac{(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})\times(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|^2}$

14. [2007·广东理二(10)、文一(4)]若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°[文科：60°]，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ______.

[文科：则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于] (　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

15. [2007·北京文二(11)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，若向量 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$，则实数 λ 的值是______.

16.［2007·上海文一(6)］若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$________.

17.［2007·天津文二(15)］在△ABC 中，$AB=2$，$AC=3$，D 是边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

18.［2007·江西文二(13)］在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的对角线 OB 的两端点分别为 $O(0,0)$，$B(1,1)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

19.［2007·山东文一(5)］已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,n)$，$\boldsymbol{b}=(-1,n)$，若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $|\boldsymbol{a}|$ 等于 (　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

20.［2007·上海春文理一(8)］若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=1$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的大小为________.

21.［2006·四川理一(7)、文一(4)］如图 1.49，已知正六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$，下列向量的数量积中最大的是 (　　)

A. $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}$　　B. $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}$

C. $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_5}$　　D. $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_6}$

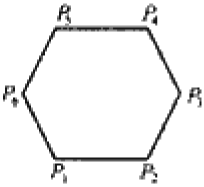


图 1.49

22.［2006·全国卷一文一(1)］已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

23.［2006·北京理一(2)、文一(3)］若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 都是非零向量，则"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$"是"$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$"的 (　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

24.［2006·浙江文一(5)］设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{c}|^2$ 等于 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 5

25.［2006·福建文一(9)］已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$，则 $|\boldsymbol{b}|$ 等于 (　　)

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 1

26.［2006·湖北文一(2)］已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 互相垂直，则 $\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=$ (　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. 4　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

27.［2006·湖南文一(2)］已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,t)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，若 $t=t_1$ 时，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；$t=t_2$ 时，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则　　(　　)

A. $t_1=-4,t_2=-1$　　B. $t_1=-4,t_2=1$

C. $t_1=4,t_2=-1$　　D. $t_1=4,t_2=1$

28.［2006·重庆文一(8)］已知三点 $A(2,3)$，$B(-1,1)$，$C(6,k)$，其中 k 为常数，若 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为　　(　　)

A. $\arccos\left(-\dfrac{24}{25}\right)$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\arccos\dfrac{24}{25}$

C. $\arccos\dfrac{24}{25}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{24}{25}$

29.［2006·天津文、理二(12)］设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，且 $\boldsymbol{a}=(3,3)$，$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,1)$，则 $\cos\theta=$ ________.

30.［2006·上海春文理一(10)］若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 150°，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=4$，则 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ ________.

31.［2005·全国卷一文一(12)］点 O 是△ABC 所在平面内的一点，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则点 O 是△ABC 的　　(　　)

A. 三个内角的角平分线的交点　　B. 三条边的垂直平分线的交点

C. 三条中线的交点　　D. 三条高的交点

32.［2005·北京理一(3)、文一(4)］若 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　　(　　)

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

33.［2005·上海春文理一(5)］在△ABC 中，若 $\angle C=90^\circ$，$AC=BC=4$，则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=$ ________.

34.［2005·天津文二(12)］已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则此平行四边形的两条对角线中较短的一条的长度为________.

35.［2005·江西文、理一(6)］已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-4)$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\dfrac{5}{2}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为　　(　　)

A. 30°　　B. 60　　C. 120°　　D. 150°

36.［2005·浙江文一(8)］已知向量 $\boldsymbol{a}=(x-5,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则由 x 的值构成的集合是　　(　　)

A. $\{2,3\}$　　B. $\{(-1,6)\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{6\}$

37.［2005·福建理一(3)］在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\overrightarrow{AB}=(k,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,3)$，则 k 的值是　　(　　)

A. 5　　B. -5　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

38. [2005·福建文一(4)]在△ABC中，$\angle A=90°$，$\overrightarrow{AB}=(k,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,3)$，则$k$的值是________.

39. [2005·湖北理二(13)、文一(3)]已知向量$\boldsymbol{a}=(-2,2)$，$\boldsymbol{b}=(5,k)$，若$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$不超过5，则$k$的取值范围是　（　）

A. $[-4,6]$　　B. $[-6,4]$　　C. $[-6,2]$　　D. $(-2,6]$

40. [2005·重庆理一(4)]已知$A(3,1)$，$B(6,1)$，$C(4,3)$，D为线段BC的中点，则向量$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{DA}$的夹角为　（　）

A. $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}$　　B. $\arccos\frac{4}{5}$

C. $\arccos(-\frac{4}{5})$　　D. $-\arccos(-\frac{4}{5})$

41. [2005·重庆文一(4)]设向量$\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$，则$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$等于　（　）

A. $(1,1)$　　B. $(-4,-4)$　　C. -4　　D. $(-2,-2)$

42. [2004·全国卷二理一(9)]已知平面上直线l的方向向量$\boldsymbol{e}=\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$，点$O(0,0)$和$A(1,-2)$在$l$上的射影分别是$O'$和$A'$，则$\overrightarrow{O'A'}=\lambda\boldsymbol{e}$，其中$\lambda$等于　（　）

A. $\frac{11}{5}$　　B. $-\frac{11}{5}$　　C. 2　　D. -2

43. [2004·全国卷Ⅱ文一(9)]已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足：$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$等于　（　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

44. [2004·全国卷一文理一(3)]已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$均为单位向量，它们的夹角为$60°$，那么$|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$等于　（　）

A. $\sqrt{7}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. 4

45. [2004·全国卷四理二(14)]向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-4$，且$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的余弦值等于________.

46. [2004·上海春文理二(15)]在△ABC中，有命题：

①$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$；②$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$；③若$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，则△$ABC$为等腰三角形；④若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>0$，则△$ABC$为锐角三角形．上述命题正确的是　（　）

A. ①，②　　B. ①，④　　C. ②，③　　D. ②，③，④

47. [2004·浙江文理二(14)]已知平面上三点A，B，C满足$|\overrightarrow{AB}|=3$，$\overrightarrow{BC}=$

4，$|\overrightarrow{CA}|=5$[文科：$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{BC}|=1$，$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}$]，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$的值等于______.

48.[2004·福建文理一(8)]已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零向量且满足$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

49.[2004·湖北理一(4)]已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为非零的平面向量.甲：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；乙：$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则　　(　　)

A.甲是乙的充分条件但不是必要条件

B.甲是乙的必要条件但不是充分条件

C.甲是乙的充要条件

D.甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

50.[2004·重庆文理一(6)]若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$|\boldsymbol{b}|=4$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-72$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的模是　　(　　)

A.2　　B.4　　C.6　　D.12

51.[2004·上海理一(6)]已知点 $A(1,-2)$，若向量$\overrightarrow{AB}$与 $\boldsymbol{a}=(2,3)$同向，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{13}$，则点 B 的坐标为______.

52.[2004·江苏文理二(16)]平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中，已知 $\boldsymbol{a}=(4,-3)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$，则向量 $\boldsymbol{b}=$______.

53.[2004·广东文理一(1)]已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$，$\boldsymbol{b}=(x,-3)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 x 等于　　(　　)

A.3　　B.1　　C. −1　　D. −3

54.[2004·天津理一(3)]若平面向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$的夹角是 180°，且$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$，则 $\boldsymbol{b}$ 等于　　(　　)

A.(−3,6)　　B.(3,−6)　　C.(6,−3)　　D.(−6,3)

55.[2004·天津文二(14)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3)$，若 $k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则实数 k 等于______.

56.[2002·上海春文理二(13)]若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为任意向量，$m\in\mathbf{R}$，则下列等式不一定成立的是　　(　　)

A. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　　B. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

C. $m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$　　D. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

57.[2002·上海文理一(2)]已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，且$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，则$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$______.

58.[2001·上海春文理一(8)]若非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 满足$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$，则

α 与 β 所成角的大小为________.

59.[2000·天津理一(4)、文一(2)]设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是任意的非零平面向量且相互不共线,则①$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;②$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;③$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直;④$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$. 其中是真命题的有 ( )

A.①,② B.②,③ C.③,④ D.②,④

60.[2000·上海文理一(1)]已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$,$\overrightarrow{OB}=(3,m)$,若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$,则 $m=$________.

五、答案与提示

1.A 2.[理科]0 [文科]-8

3.3 提示:$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

4.$\sqrt{7}$ 提示:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$ 5.C 6.2

7.22 提示:$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$或利用定比分点公式求 E、F 点坐标

8.A

9.$-\frac{8}{3}$ 提示:$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$,$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

10.A 提示:$\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}$

11.D 提示:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$

12.B 提示:A 中:由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 得不到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;$B$ 中:若 $\lambda\neq0$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;或 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\lambda=0$

13.C 提示:A 中:$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AC}|$;$C$ 中:$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CD}|\cos(\pi-\angle ACD)=-|\overrightarrow{CD}|^2$

14.[理科]$\frac{1}{2}$ [文科]B

15.-3 16.$\frac{1}{2}$

17.$\frac{5}{2}$ 提示:$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

18.1 提示:解一:$A(1,0)$,$C(0,1)$ 解二:正方形边长为 1

19. C　20. $\frac{3\pi}{4}$

21. A　提示：(排除法)由$\overrightarrow{P_1P_2}\perp\overrightarrow{P_1P_5}$，排除 C，由$<\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_6}>=\frac{2\pi}{3}$知$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_6}<0$，排除 D. 设正六边形边长为 a，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}=\frac{3}{2}a^2$，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}=a^2$

22. C　23. C

24. D　提示：$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$|\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$

25. B　提示：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$，解方程

26. D　提示：$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$

27. C

28. D　提示：由$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$，求得 $k=0$ 或 $k=6$

29. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　提示：设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$，求得 $\boldsymbol{b}=(1,2)$

30. 2　提示 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$

31. D　提示：由已知$\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$，即$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

32. C　提示：由 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 得$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$

33. 6　提示：$\angle B=45^\circ$，$BA=4\sqrt{2}$

34. $2\sqrt{3}$　提示：作出图知即求$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

35. C　提示：设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\frac{5}{2}$得$-x-2y=\frac{5}{2}$，又 $x^2+y^2=5$，解得 $x=\frac{-1\mp2\sqrt{3}}{2}$，$y=\frac{-1\pm2\sqrt{3}}{2}$，所以 $\boldsymbol{c}=\left(\frac{-1-2\sqrt{3}}{2},\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}\right)$或 $\boldsymbol{c}=\left(\frac{-1+2\sqrt{3}}{2},\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}\right)$

36. C

37. A　提示：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

38. $-\frac{3}{2}$

39. C

40. C　提示：$\overrightarrow{DA}=(-2,-1)$

41. B

42. D　提示：使 l 过原点，则 O' 与 O 重合，$A'\left(-\frac{4}{5}\lambda,\frac{3}{5}\lambda\right)$，$\overrightarrow{AA'}\perp\boldsymbol{e}$

43. D　提示：由$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，得 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$

44. C

45. $-\frac{1}{2}$　提示：将$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-4$展开可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$

46. C　提示：对④：由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>0$只能得到 A 为锐角，而 B 和 C 不一定为锐角

47. -25　［文科：-4］　提示：$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\cos C=\frac{4}{5}$，$\cos A=\frac{3}{5}$

48. B　提示：由$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=0$. 可得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

49. B　提示：$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$时也有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 不一定是零向量

50. C　提示：由已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|$，将$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$展开得$|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-24=0$

51. $(5,4)$　提示：设$\overrightarrow{AB}=k(2,3)(k>0)$，由$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{13}$得 $k=2$

52. $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$　提示：设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$

53. C

54. A　提示：设 $\boldsymbol{b}=-k(1,-2)(k>0)$，由$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$得 $k=3$

55. -1　56. D　57. B

58. $90°$　提示：构造平行四边形，此时两对角线相等，因此为矩形

59. D　提示：①是假命题：因为 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不一定共线　②是真命题，因为三角形两边之差小于第三边　③不是真命题，因为$[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0$

60. 4　提示：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

第二章　空间向量

第一节　空间向量的概念与运算

一、高考内容

（一）空间向量及其加减运算

1. 空间向量　在空间，我们把具有大小和方向的量叫空间向量，向量的大小叫向量的长度或模. 空间向量也用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的模. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是 A，终点是 B，则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作$\overrightarrow{AB}$，其模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

2. 零向量　规定长度为 0 的向量叫零向量，记为 $\boldsymbol{0}$. 当有向线段的起点 A 与终点 B 重合时，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$.

3. 单位向量　模为 1 的向量称为单位向量.

4. 相反向量　与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等而方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

5. 相等向量　方向相同且模相等的向量称为相等向量. 在空间，同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量. 空间任意两个向量都可以平移到同一个平面，成为同一平面内的两个向量.

6. 空间向量的加法和减法运算（图 2.1）：

（1）$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

（2）空间向量的加法运算满足交换律及结合律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

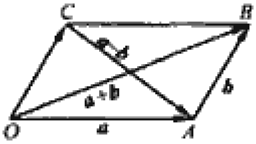


图 2.1

（二）空间向量的数乘运算

1. 数乘运算　实数 λ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 称为向量的数乘运算. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；$\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍.

2. 空间向量的数乘运算满足分配律及结合律：

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\quad \lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

3. 共线向量　如果表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫共线向量或平行向量，$\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

4. 共线向量定理　对空间任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

5. 直线的方向向量　如图 2.2，l 为经过已知点 A 且平行于已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的直线. 对空间任意一点 O，点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t，使

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}\qquad ①$$

其中向量 $\boldsymbol{a}$ 叫直线 l 的方向向量，在 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，则式①可化为

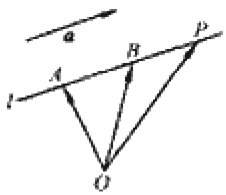


图 2.2

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{AB}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}\qquad ②$$

①和②都称为空间直线的向量参数表示式，当 $t=\dfrac{1}{2}$，即点 P 是线段 AB 的中点时，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，此式叫线段 AB 的中点公式.

6. 共面向量　如图 2.3，已知平面 α 与向量 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，如果直线 OA 平行于平面 α 或 $\boldsymbol{a}$ 在 α 内，则说向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于平面 α，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\alpha$，我们把平行于同一个平面的向量，叫共面向量.

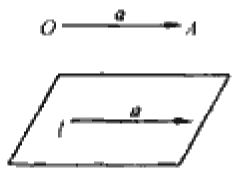


图 2.3

7. 共面向量定理　如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x,y)，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

推论　(1)空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在有序实数对 (x,y)，使 $\overrightarrow{AP}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$；或对空间任意一点 O，有

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}\qquad ③$$

式③称为空间平面 ABC 的向量表达式.

(2)已知空间任意一点 O 和不共线的三点 A,B,C，满足向量关系式 $\overrightarrow{OP}=x\,\overrightarrow{OA}+y\,\overrightarrow{OB}+z\,\overrightarrow{OC}$（其中 $x+y+z=1$）的点 P 与点 A,B,C 共面；反之也成立.

(三)空间向量的数量积运算

1. 两向量夹角　已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 叫向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，通常规定：$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，于是 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$.

如果 $\langle a,b\rangle=\frac{\pi}{2}$，那么向量 a,b 互相垂直，记作 $a\perp b$.

2.数量积定义　如图2.4，已知两个非零向量 a,b，则 $|a||b|\cos\langle a,b\rangle$ 叫 a,b 的数量积，记作 $a\cdot b$，即 $a\cdot b=|a||b|\cos\langle a,b\rangle$.零向量与任何向量的数量积为0.特别的，$a\cdot a=|a|^2$.



图2.4

3.空间向量的数量积满足如下的运算律：

$$(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b),\ a\cdot b=b\cdot a\text{(交换律)}$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\text{(分配律)}$$

*4.射影　如图2.5，已知向量 $\overrightarrow{AB}=a$ 和轴 l，e 是 l 上与 l 同方向的单位向量，作点 A 在 l 上的射影 A'，作点 B 在 l 上的射影 B'，则 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上或在 e 方向上的正射影，简称射影，于是 $A'B'=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\langle a,e\rangle=a\cdot e$（此式可用于求两异面直线 AA' 与 BB' 间的距离，e 是它们的公垂线 l 方向上的单位向量），这就是空间向量数量积的几何意义.

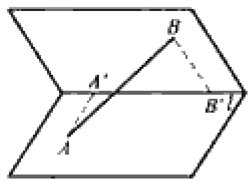


图2.5

二、高考要求(理科)

1.了解空间向量的概念，掌握空间向量的线性运算.

2.掌握空间向量的数量积，能运用向量的数量积判断向量的共线与垂直.

三、解法指导

(一)空间向量的加法、减法、数乘运算

要进行空间向量的线性运算，可根据向量运算的法则、运算律及有关公式进行.

1.求空间若干个向量之和时，可通过平移将它转化为同起点或首尾相接的向量，以便利用向量加法的平行四边形法则或多边形法则.首尾相接的若干向量之和等于由起始向量的起点指向末尾向量的终点的向量.因此，它们若构成一个封闭图形，则它们的和为零向量(称为封口向量).

2.化简向量表达式时要注意结合图形进行，主要是利用平行四边形法则或三角形法则，遇到减法时既可按减法法则运算，也可转化成加法.加、减法之间可以互相转化.表达式中各向量的系数相等时，可以把相同的系数提取到括

号外面.

例 1 [2007·安徽文二(13)]如图 2.6,在四面体 $O-ABC$ 中,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$D$ 为 BC 的中点,E 为 AD 的中点,则$\overrightarrow{OE}=$______(用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示).

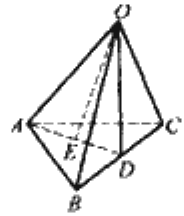


图 2.6

解 在$\triangle OBC$ 中,因为 D 是 BC 的中点,所以$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$;在$\triangle OAD$ 中,因为 E 是 AD 的中点,所以$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

例 2 在空间四边形 $ABCD$ 中,联结 AC,BD,若$\triangle BCD$ 是正三角形,且 E 为其中心,则$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AD}$的化简结果为______.

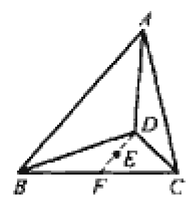


图 2.7

解 如图 2.7,联结 DE 并延长交 BC 于 F,因为 E 是正$\triangle BCD$ 的中心,所以 F 为 BC 的中点,则$\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$,所以$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{0}$.

(二)空间共线向量定理的应用

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$$

利用此定理可解决立体几何中的平行问题.

例 3 已知:$\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{n}=(x+1)\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+2y\boldsymbol{c}$,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,若 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,求 x,y 的值.

解 因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,且 $\boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{m}$,即$(x+1)\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+2y\boldsymbol{c}=3\lambda\boldsymbol{a}-2\lambda\boldsymbol{b}-4\lambda\boldsymbol{c}$.又因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,所以$\begin{cases}x+1=3\lambda\\8=-2\lambda\\2y=-4\lambda\end{cases}$,解得 $x=-13$,$y=8$.

(三)空间向量数量积的运算

1.要求空间两个向量的数量积,又须求出两向量的模及夹角后代入公式即可,有了空间向量的数量积及其运算律后,向量就可以类比于实数中多项式加、减、乘法的运算一样进行.

如$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+$

$|\boldsymbol{b}|^2$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$.

2. 要求空间两向量（$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$）的夹角时，可先求其余弦值：$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

3. 要求向量的长时，可改为求其自身的数量积：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

4. 要判断两向量（$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$）是否垂直，可以求两向量数量积是否会为 0：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

5. $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 为锐角 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 为钝角 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$. 由此，我们常通过计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 值的正负来判断两向量夹角是锐角还是钝角.

例 4　[1998·日本高考题]如图 2.8，考虑平行六面体 $OABC-DEFG$，其面 $OABC$ 与 $CBFG$ 是正方形，面 $OCGD$ 是菱形，且 $\angle COD=60°$. 设平行六面体各棱长均为 1，那么，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=$________，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=$________. 设 a 是在 $0<a<1$ 之间的常数，P 是分 EB 成 $2:1$ 的分点，Q 是分 GE 成 $a:(1-a)$ 的分点，那么，$\overrightarrow{PG}=-\overrightarrow{OA}+$________$\overrightarrow{OC}+$________$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{PQ}=(a-1)\overrightarrow{OA}+$________$\overrightarrow{OC}+$________$\overrightarrow{OD}$，当 $a=$________时，PQ 的长度达到最小值为________.

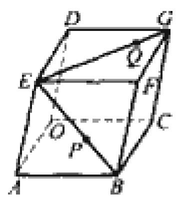


图 2.8

解　如图 2.8，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos 90°=0$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|\cdot\cos 60°=\dfrac{1}{2}$.

又因为 P 是分 EB 成 $2:1$ 的分点，Q 是分 GE 成 $a:(1-a)$ 的分点，所以 $\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{GQ}=a\overrightarrow{GE}$，则 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}(-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GQ}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})+a(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=a\overrightarrow{OA}+(1-a)\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$，所以 $\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})-(\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OD})=-\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OD}$.

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+(1-a)\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-(\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OD})=(a-1)\overrightarrow{OA}+(\dfrac{1}{3}-a)\overrightarrow{OC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OD}$.

当 $PQ\perp GE$ 时，PQ 的长度最小，此时 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{GE}=0$，即 $[(a-1)\overrightarrow{OA}+(\dfrac{1}{3}-a)\overrightarrow{OC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OD}]\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$，$(a-1)|\overrightarrow{OA}|^2+(\dfrac{1}{3}-a)\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}-(a-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-(\dfrac{1}{3}-a)|\overrightarrow{OC}|^2-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}=0$. 因为 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，$\overrightarrow{OD}\cdot$

$\overrightarrow{OA}=0,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}$，所以 $a-1-(\frac{1}{3}-a)-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=0$，解得 $a=\frac{5}{6}$. 又因为 $OCGD$ 是菱形，且 $\angle COD=60^\circ$，所以面 $ABFE$ 也是菱形，且 $\angle BAE=60^\circ$，从而 $BE=1$，$PE=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}$. 因为 $EG=\sqrt{2}$，所以 $EQ=\sqrt{2}(1-a)$. 当 $a=\frac{5}{6}$ 时，$EQ=\frac{\sqrt{2}}{6}$. 而在 $\mathrm{Rt}\triangle PQE$ 中，$PQ^2=PE^2-EQ^2=\frac{14}{34}$，$PQ=\frac{\sqrt{14}}{6}$，所以当 $a=\frac{5}{6}$ 时，PQ 的长度达到最小值 $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

例 5 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是空间两个向量，$|\boldsymbol{a}|=3$、$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

解 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=9-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4=13-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$. 则 $\cos<\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{3\times2}=\frac{1}{2}$，所以 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=60^\circ$.

例 6 在各棱长都等于 1 的正四面体 $OABC$ 中，若点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（其中 $x+y+z=1$），则 $\overrightarrow{OP}$ 的最小值等于________.

解一 由于 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，所以 $|\overrightarrow{OP}|^2=(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC})^2=x^2|\overrightarrow{OA}|^2+y^2|\overrightarrow{OB}|^2+z^2|\overrightarrow{OC}|^2+2xy\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2xz\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2yz\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$. 因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}>=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}$，所以 $|\overrightarrow{OP}|^2=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz=(x+y+z)^2-(xy+yz+xz)=1-(xy+yz+xz)$. 因为 $2xy\leqslant x^2+y^2$，$2yz\leqslant y^2+z^2$，$2xz\leqslant x^2+z^2$（以上三式当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时都取等号），所以 $2(xy+yz+xz)\leqslant2(x^2+y^2+z^2)$，$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz$. 由 $1=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\geqslant3(xy+yz+xz)$，所以 $xy+yz+xz\leqslant\frac{1}{3}$. 于是 $|\overrightarrow{OP}|^2\geqslant1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，$|\overrightarrow{OP}|\geqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$，即 $|\overrightarrow{OP}|$ 的最小值等于 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解二 因为点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（其中 $x+y+z=1$），所以点 P 与 A,B,C 三点共面，即点 P 在平面 ABC 上，所以 $\overrightarrow{OP}$ 的最小值即点 O 到平面 ABC 的距离，亦即正四面体的高，可求得高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\overrightarrow{OP}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

例 7 如图 2.9，已知 M 为各棱长均为 1 的正四面体 $OABC$ 的棱 OA 的中点，点 P 内分线段 MB 为 $t:(1-t)(0<t<1)$. 当 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$ 时，求 t 的值.

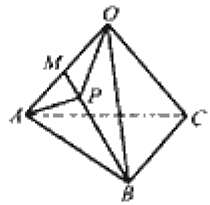


图 2.9

解　由已知 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OM}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=(1-t)\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{OB}=\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\frac{1+t}{2}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$．因为 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$，所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=(\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})\cdot(-\frac{1+t}{2}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=-\frac{1-t^2}{4}\overrightarrow{OA}^2+\frac{(1-t)t}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{(1+t)t}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t^2\overrightarrow{OB}^2=\frac{t^2-1}{4}-t^2\cos 60^\circ+t^2=\frac{3t^2-1}{4}=0$，解得 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$．因为 $0<t<1$，所以 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

例 8　设 A,B,C,D 是空间不共面的四个点，且满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则△$BCD$ 的形状是　　　　(　　)

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形　　C. 锐角三角形　　D. 无法确定

解一　$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}^2>0$，同理可得 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}>0$，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}>0$，所以△$BCD$ 是锐角三角形，应选 C.

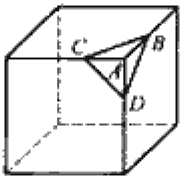


图 2.10

解二　(数形结合法)由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 知 AB,AC,AD 两两互相垂直，构造一正方体，切去一个角(图 2.10)，三棱锥 $A-BCD$ 满足题设条件，而且△BCD 是锐角三角形，应选 C.

(四)共面向量定理的应用

例 9　已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AD}=3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$，求证：$A,B,C,D$ 四点共面.

证一　设 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则

$$3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=x\boldsymbol{e}_1+x\boldsymbol{e}_2+2y\boldsymbol{e}_1+8y\boldsymbol{e}_2=(x+2y)\boldsymbol{e}_1+(x+8y)\boldsymbol{e}_2$$

所以 $\begin{cases}x+2y=3\\x+8y=-3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$，所以 $\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，因此 A,B,C,D 四点共面.

证二　令 $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$，即

$$x(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+y(2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2)+z(3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)=\mathbf{0}$$

则

$$(x+2y+3z)\boldsymbol{e}_1+(x+8y-3z)\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases}x+2y+3z=0\\x+8y-3z=0\end{cases}$，易见 $\begin{cases}x=-5\\y=1\\z=1\end{cases}$ 是其中的一组解，则

$-5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$,所以 A,B,C,D 四点共面.

* **例 10** 如图 2.11,平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 A_1B_1 上有点 M,B_1C_1 上有点 N,BB_1 上有点 K,对角线 B_1D 与平面 MNK 交于点 P,已知点 M 内分 A_1B_1 为 1:3,N 为 B_1C_1 中点,点 K 内分 BB_1 为 2:5,求 P 内分 B_1D 的比值.

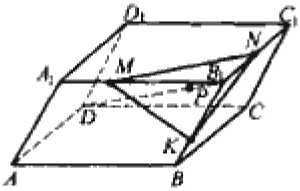


图 2.11

解 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是平行六面体,所以

$$\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1C_1} \quad ①$$

设$\dfrac{B_1P}{B_1D}=x$,即$\overrightarrow{B_1D}=\dfrac{1}{x}\overrightarrow{B_1P}$,因为$\dfrac{A_1M}{MB_1}=\dfrac{1}{3}$,所以$\overrightarrow{B_1A_1}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{B_1M}$,因为 N 为 B_1C_1 中点,所以$\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1N}$,因为$\dfrac{BK}{KB_1}=\dfrac{2}{5}$,所以$\overrightarrow{B_1B}=\dfrac{7}{5}\overrightarrow{B_1K}$,代入式①得,$\dfrac{1}{x}\overrightarrow{B_1P}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{B_1M}+\dfrac{7}{5}\overrightarrow{B_1K}+2\overrightarrow{B_1N}$,所以$\overrightarrow{B_1P}=\dfrac{4}{3}x\overrightarrow{B_1M}+\dfrac{7}{5}x\overrightarrow{B_1K}+2x\overrightarrow{B_1N}$.

因为 P,M,N,K 四点共面,所以$\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{5}x+2x=1$,$x=\dfrac{15}{71}$,即$\overrightarrow{B_1P}=\dfrac{15}{71}\overrightarrow{B_1D_1}$,所以$\dfrac{B_1P}{PD}=\dfrac{15}{56}$,即 P 内分 B_1D 的比值为 15:56.

四、走进考场 4

1.[2001·上海文理二(14)]如图 2.12,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为 AC 与 BD 的交点,若$\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$,则下列向量中与$\overrightarrow{B_1M}$相等的向量是 ( )

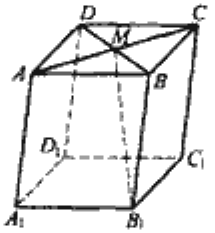


图 2.12

A. $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　B. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　D. $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

2.在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,求证:$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}=2\overrightarrow{AC_1}$(此结论可以认为是向量加法的平行四边形法则在空间的推广——即平行六面体法则).

3.设 $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{a}_3=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{a}_4=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$,是否存在实数 λ,μ,ν,使 $\boldsymbol{a}_4=\lambda\boldsymbol{a}_1+\mu\boldsymbol{a}_2+\nu\boldsymbol{a}_3$ 成立?如果存在,求出 λ,μ,ν;如果不存在,请给出证明.

4.在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,给出以下向量表达式:①$(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1A})-\overrightarrow{AB}$;②$(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB_1})-\overrightarrow{D_1C_1}$;③$(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})-2\overrightarrow{DD_1}$;④$(\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{A_1A})+\overrightarrow{DD_1}$,其中能够化简为向量$\overrightarrow{BD_1}$的是　　(　　)

A.①,②　　B.②,③　　C.③,④　　D.①,④

5.已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 $30°$,且 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$,则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$________.

6.已知向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直,$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　　(　　)

A.30°　　B.60°　　C.90°　　D.120°

五、提示与答案

1.A　提示:$\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1B_1})$

2.提示:$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1})$

3.$\lambda=-2,\mu=1,\nu=-3$

4.A　提示:①中$(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1A})-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD_1}$;②中$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})-\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{BD_1}$

5.$6\sqrt{3}-23$

6.B　提示:由已知得 $7\boldsymbol{a}^2-15\boldsymbol{b}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　　①

$$7\boldsymbol{a}^2+8\boldsymbol{b}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\qquad②$$

由①,②得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2$ 且 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$

第二节　空间向量的坐标运算

一、高考内容

(一)空间向量的正交分解及其坐标表示

1.空间向量基本定理

如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$,存在一个唯一的

有序实数组 x,y,z，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$. 我们把 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 叫空间的一个基底，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都叫基向量.

推论 设 O,A,B,C 是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在唯一的有序实数组 x,y,z，使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

2. 空间直角坐标系

(1)单位正交基底 如果空间的一个基底的三个基向量互相垂直，且长都为1，则这个基底叫单位正交基底，常用 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 来表示.

(2)右手直角坐标系 在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，以点 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的方向为正方向建立三条数轴：x 轴，y 轴，z 轴，它们都叫坐标轴，这时我们说建立了一个空间直角坐标系 $O-xyz$，点 O 叫原点，向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 都叫坐标向量，通过每两个坐标轴的平面叫坐标平面，分别称为 xOy 平面，yOz 平面，zOx 平面. 在平面纸上作空间直角坐标系 $O-xyz$ 时，一般使 $\angle xOy=135°$（或 $45°$），$\angle yOz=90°$. 在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指指向 y 轴的正方向，如果中指能指向 z 轴的正方向，则称这个坐标系为右手直角坐标系.

(3)坐标 给定一个空间直角坐标系和向量 $\boldsymbol{a}$，且设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为坐标向量，则存在唯一的有序实数组 (a_1,a_2,a_3)，使 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，有序数组 (a_1,a_2,a_3) 叫 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标，上式可简记作 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$.

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，对空间任一点 A，对应一个向量 $\overrightarrow{OA}$，于是存在唯一的有序实数组 x,y,z，使 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 在单位正交基底 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 中与向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的有序实数组 (x,y,z)，叫点 A 在此空间直角坐标系中的坐标，记 $A(x,y,z)$. 其中 x 叫点 A 的横坐标，y 叫点 A 的纵坐标，z 叫点 A 的竖坐标.

(二)空间向量运算的坐标表示

1. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in\mathbf{R})$. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in\mathbf{R})$；$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

2. 设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. 即一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

3. 模长、夹角和距离公式.

(1)模长公式　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$;

(2)夹角公式　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, 则 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

(3)两点间距离公式　在空间直角坐标系中,已知 $A(x_1,y_1,z_2)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, 则 $d_{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

二、高考要求(理科)

1. 了解空间向量的基本定理及其意义,掌握空间向量的正交分解及其坐标表示.

2. 掌握空间向量运算的坐标表示.

三、解法指导

(一)用基底表示向量

由空间向量的基本定理可知,只要不共面的三个向量(它们一定不是零向量)都能构成空间的一个基底(注意:一个基底是指一个向量组,与基向量是不同的概念).空间中任一个量都可以用它们表示出来,而且表示的结果是唯一的.

(1)基向量的选取　除要求不共面外,还要能够便于表示所求的目标向量,应优先选择相互夹角为已知的向量作为基底.

(2)若题目要求用已知向量表示某向量,可结合图形把要求的向量放在含有"基向量"的封闭的多边形图形中(含有基向量的图形很多,哪一个都行.当然,运算越简单越好),并注意利用向量的运算法则,也可以用待定系数法求得.

(3)若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=x'\overrightarrow{OA}+y'\overrightarrow{OB}+z'\overrightarrow{OC}$, 则 $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$.

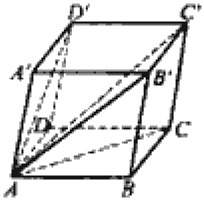


图 2.13

例 1　如图 2.13,在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,求证:$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

证明　以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA}\}$ 为基底,由 $ABCD-A'B'C'D'$ 是平面六面体得:$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+$

$\overrightarrow{AA}$，所以$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$，而$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$，所以$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}=2\overrightarrow{AD'}$.

例 2 在空间四边形 $PABC$ 中，设$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}$，$G$ 是$\triangle ABC$ 的重心，试证$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(2)试问(1)的逆命题是否成立？并证明你的结论.

解 (1)如图 2.14，联结 AG 并延长交 BC 于 D，联结 PD. $\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA})=\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

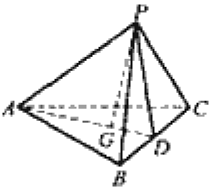


图 2.14

(2)逆命题成立，证明如下：

设 D 分$\overrightarrow{BC}$所成的比为 p，G 分$\overrightarrow{AD}$所成的比为 q，则

$$\overrightarrow{BD}=\frac{p}{1+p}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{p}{1+p}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{q}{1+q}\overrightarrow{AD}=\frac{q}{1+q}(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA})$$

$$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{PB}+\frac{p}{1+p}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})=\frac{1}{1+p}\overrightarrow{PB}+\frac{p}{1+p}\overrightarrow{PC}$$

于是

$$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{PA}+\frac{q}{1+q}\cdot(\frac{1}{1+p}\overrightarrow{PB}+\frac{p}{1+p}\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})=$$
$$\frac{1}{1+q}\overrightarrow{PA}+\frac{q}{(1+q)(1+p)}\overrightarrow{PB}+\frac{pq}{(1+q)(1+p)}\overrightarrow{PC}$$

因为$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，所以

$$\frac{1}{1+q}=\frac{q}{(1+q)(1+p)}=\frac{pq}{(1+q)(1+p)}=\frac{1}{3}$$

解得 $q=2$，$p=1$，于是 G 为$\triangle ABC$ 的重心.

例 3 已知$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$为空间的一组基，且$\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OB}=-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$.

(1)判断 P,A,B,C 四点是否共面；

(2)能否以$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$作为空间的一组基？若不能，说明理由；若能，试以这一组基表示向量$\overrightarrow{OP}$.

解 (1)设四点共面，则存在实数 x,y,z，使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，且 $x+y+z=1$，即

$$2e_1-e_2+3e_3=x(e_1+2e_2-e_3)+y(-3e_1+e_2+2e_3)+z(e_1+e_2-e_3)$$

比较对应项系数得 $\begin{cases}x-3y+z=2\\2x+y+z=-1\\-x+2y-z=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=17\\y=-5\\z=-30\end{cases}$ 与 $x+y+z=1$ 矛盾，故四点不共面.

(2)若向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 共面，则存在实数 m,n，使 $\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$，同(1)可证这不可能. 因此，$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ 可以作为空间的一组基，令 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 由 $e_1+2e_2-e_3=\boldsymbol{a}$，$-3e_1+e_2+2e_3=\boldsymbol{b}$，$e_1+e_2-e_3=\boldsymbol{c}$，联立得到方程组，解得 $\begin{cases}e_1=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}\\e_2=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\\e_3=4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}\end{cases}$，所以 $\overrightarrow{OP}=17\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{OB}-30\overrightarrow{OC}$.

(二)建立空间直角坐标系和确定空间一点的坐标的方法

和建立平面直角坐标系一样，在建立空间直角坐标系时应尽量利用题设中的垂直关系. 一般的，(1)如果图形中有由同一点引出的三条线段两两互相垂直(如正方体、长方体)，则以此点为原点，三条线段所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系；(2)如果有某条直线或线段垂直某平面时(如直棱柱)，常以垂足为坐标原点，以这直线为 z 轴；(3)如果有两平面互相垂直时，常由一平面内某点向交线作垂线，则此垂线垂直另一平面. 可以垂足为坐标原点，此垂线和交线作坐标轴；(4)如果平面内有直角时，常以直角顶点为坐标原点，两直角边所在直线为 x 轴，y 轴. 总之，坐标系的建立，要有利于各点的坐标表示.

建立坐标系后，空间任一点 A 的坐标的确定方法是：点 A 在 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴上的射影所对应的实数构成的有序实数组 (x,y,z) 就是点 A 的坐标.

如图 2.15，过 A 作 z 轴的平行线交平面 xOy 于 B，过 B 作 x 轴，y 轴的平行线分别交 y 轴，x 轴于点 C,D，则由 $\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BA}$ 的长度和方向便可求得点 A 的坐标(称垂线法).

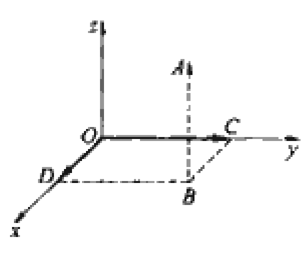


图 2.15

注意 (1)在建立空间直角坐标系时有时还须先证某两直线垂直；(2)点的坐标与向量的坐标是不同的两个概念；(3)要灵活运用平几知识和解直

角三角形知识来求出点的坐标;(4)若要求坐标的点是它所在线段的定比分点、中点或某三角形的重心,则可用相应公式直接写出其坐标;(5)为方便求某一坐标平面上点的坐标,有时可把该平面上的图形另外画出(例5).

例4 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是一直角梯形,$\angle BAD=90^\circ$,$AD/\!/BC$,$AB=BC=1$,$AD=2$,且 $PA\perp$底面 $ABCD$,PD 与底面成 30° 角,$AE\perp PD$,垂足为 E. 试建立空间直角坐标系并求出点 E,C 在该坐标系中的坐标.

解 (1) A 为坐标原点,分别以 AB,AD,AP 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系如图2.16所示.

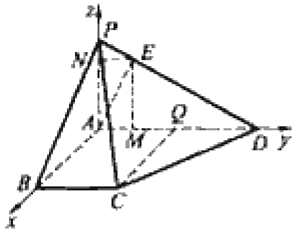


图2.16

因为 $PA\perp$底面 $ABCD$,所以 $\angle PDA$ 为 PD 与底面所成的角,即 $\angle PDA=30^\circ$,过 E 作 $EM\perp AD$ 于 M,$EN\perp PA$ 于 N. 因为 $AD=2$,所以 $AE=AD\cdot\sin 30^\circ=1$,所以 $EM=AE\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$EN=\frac{1}{2}$,则 $E(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. 过 C 作 $CQ\perp AD$ 于 Q,则 $AQ=BC=1$,所以 $C(1,1,0)$.

例5 [2005·江苏文理三(21)改]如图2.17,在五棱锥 $S-ABCDE$ 中,$SA\perp$底面 $ABCDE$,$SA=AB=AE=2$,$BC=DE=\sqrt{3}$,$\angle BAE=\angle BCD=\angle CDE=120^\circ$,试建立空间直角坐标系并求出在此坐标系下向量 $\overrightarrow{CD}$ 的坐标.

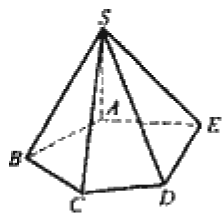


图2.17

解 联结 BE,延长 BC,ED 交于点 F. 因为 $\angle BCD=\angle CDE=120^\circ$,所以 $\angle DCF=\angle CDF=60^\circ$,则 $\angle CFD=60^\circ$,所以 $\triangle CDF$ 为正三角形,则 $CF=DF$,又 $BC=DE$,所以 $BF=EF$,则 $\angle EBC=60^\circ$. 因为 $AB=AE$,$\angle BAE=120^\circ$,所以 $\angle ABE=30^\circ$,则 $\angle ABC=90^\circ$.

以 A 为坐标原点,AB,AS 所在直线为 x 轴,z 轴,平面 ABC 内垂直于 AB 的直线为 y 轴建立空间直角坐标系,如图2.18所示,$B(2,0,0)$,$S(0,0,2)$,$C(2,\sqrt{3},0)$.

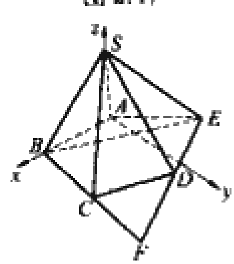


图2.18

下面求点 D 的坐标. 如图2.19,过 D 作 $DG\perp x$ 轴于 G,$DM\perp y$ 轴于 M,延长 MD 交 BF 于 H. 由 $BF/\!/y$ 轴得 $DH\perp CF$. $BE=2\cdot2\cdot\cos 30^\circ=2\sqrt{3}=BF$,则 $CF=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$. 因为 $\triangle DCF$ 为等边三角形,所以 $DH=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$,则 $x_D=AG=AB-GB=AB-DH=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$,$y_D=AM=$

$BH=\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $D\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$，则 $\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

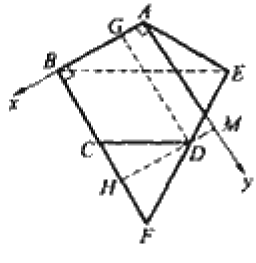


图 2.19

例 6　在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=20$，$BC=30$，沿中线 AD 将△ADC 折起，使平面 ADC⊥平面 ADB，点 G 内分 BC 为 2:1，试建立空间直角坐标系并求点 G 在该坐标系下的坐标.

解　如图 2.20(b)，过 C 作 $CH\perp AD$ 于 H. 因为平面 ADC⊥平面 ADB，所以 CH⊥平面 ADB. 以 H 为坐标原点，HA，HC 所在直线为 y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图 2.20(b)所示.

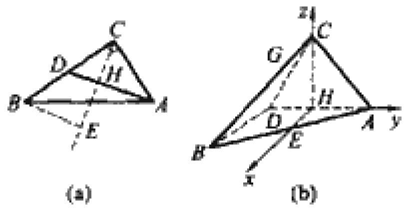


图 2.20

在图 2.20(a)中，过 C 作 $CH\perp AD$ 于 H，过 B 作 $BE\perp CH$ 于 E. 折叠后的 HE 即 x 轴方向. 因为 $CD=\frac{1}{2}BC=15$，所以 $AD=\sqrt{20^2+15^2}=25$. 又因为 $AC^2=AH\cdot AD$，所以 $AH=\frac{20^2}{25}=16$，$DH=25-16=9$，所以 $A(0,16,0)$，$D(0,-9,0)$. 因为 $CH^2=AH\cdot DH=16\times 9$，所以 $CH=12$，则 $C(0,0,12)$. 因为 $DH \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}BE$，所以 $BE=2DH=18$，$HE=CH=12$，所以 $B(12,-18,0)$. 因为 $\frac{BG}{GC}=2$，所以 $x_G=\frac{12+2\times 0}{1+2}=4$，$y_G=\frac{-18+2\times 0}{1+2}=-6$，$z_G=\frac{0+2\times 12}{1+2}=8$，所以 $G(4,-6,8)$.

（三）空间向量的坐标运算

1. 依运算法则和运算律进行，当题设中有出现两向量共线或垂直的条件时，要注意利用向量共线或垂直的充要条件来帮助解题.

2. 要求空间中某点的坐标，可先根据已知条件设出该点的坐标，再根据图形将已知条件中的线或线段间的关系转化为向量间的关系（如点在线段上时可利用向量共线条件 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 得出一个关系式），或利用题目中已知的数量关系，通过坐标运算列出方程(组)，解方程(组)求得点的坐标.

例 7　设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是不同的两点，若 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ ($\lambda\in\mathbf{R}$ 且 $\lambda\neq-1$)，求证：点 P 的坐标为 $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

证明 设点 P 坐标为(x,y,z)，则$\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$，$\overrightarrow{PP_2}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$. 因为$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，所以$\begin{cases}x-x_1=\lambda(x_2-x)\\y-y_1=\lambda(y_2-y)\\z-z_1=\lambda(z_2-z)\end{cases}$，解得

$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\\z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\end{cases}$，所以点 P 坐标为$\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

说明 像平面向量一样，我们把满足"$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$"的点 P 叫定比为λ的 P_1P_2 的定比分点，上述结果是空间向量的定比分点坐标公式，其中向量形式为$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}$. 特别地，当$\lambda=1$，即点 P 是线段 P_1P_2 的中点时，点 P 坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$，这就是中点公式. 类似地可得，空间$\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标为$\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3},\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3},\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$，其中 $A(x_A,y_A,z_A)$，$B(x_B,y_B,z_B)$，$C(x_C,y_C,z_C)$.

例 8 已知 A,B,C 三点的坐标分别是$(2,-1,2)$，$(4,5,-1)$，$(-2,2,3)$. 求点 P 的坐标使$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AC})$（$O$ 为坐标原点）.

解 设 P 为(x,y,z)，则

$$\overrightarrow{AP}=(x-2,y+1,z-2)$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}[(4,5,-1)-(-4,3,1)]=\frac{1}{2}(8,2,-2)=(4,1,-1)$$

因为$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AC})$，所以 $x-2=4$，$y+1=1$，$z-2=-1$，则 $x=6$，$y=0$，$z=1$，则点 P 坐标为$(6,0,1)$.

例 9 已知向量$\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{OP}=(1,1,2)$，在$\overrightarrow{OP}$或它的延长线上取一点 S，使$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$取最小值.

解 设$\overrightarrow{OS}=k\overrightarrow{OP}=(k,k,2k)$，则 $S(k,k,2k)$，$\overrightarrow{SA}=(1-k,2-k,3-2k)$，$\overrightarrow{SB}=(2-k,1-k,2-2k)$，所以

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=(1-k)(2-k)+(2-k)(1-k)+(3-2k)(2-2k)=$$

$$6k^2-16k+10=6(k-\frac{4}{3})^2-\frac{2}{3}$$

当 $k=\frac{4}{3}$ 时，$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ 最小，此时 $S\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$.

例 10 [2008·海南理二(3)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(4,1,0)$，$|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{29}$，且 $\lambda>0$，则 $\lambda=$________.

解 因为 $\boldsymbol{a}=(0,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(4,1,0)$，所以 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,1-\lambda,\lambda)$，因为 $|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{29}$，所以 $16+(1-\lambda)^2+\lambda^2=29$，即 $\lambda^2-\lambda-6=0$，解得 $\lambda=3$ 或 $\lambda=-2$(不合)，所以 $\lambda=3$.

例 11 已知 $A(0,2,3)$，$B(-2,1,6)$，$C(1,-1,5)$ 为空间三点，求以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为边的平行四边形的面积.

解
$$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3),\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$$
$$\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2+3+6}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{1+9+4}}=\frac{1}{2}$$

所以 $\sin<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则
$$S=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$$

所以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为边的平行四边形的面积为 $7\sqrt{3}$.

例 12 已知 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,2)$，求满足下列条件的点 D 的坐标：$DB/\!/AC$，$DC/\!/AB$.

解 设点 D 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{DB}=(-x,1-y,-z)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{DC}=(-x,-y,2-z)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$. 因为 $DB/\!/AC$，$DC/\!/AB$，所以

$\overrightarrow{DB}/\!/\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DC}/\!/\overrightarrow{AB}$，则 $\begin{cases}\frac{-x}{-1}=\frac{-z}{2}\\1-y=0\\\frac{-x}{-1}=\frac{-y}{1}\\2-z=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=2\end{cases}$，所以 $D(-1,1,2)$.

例 13 [1994·上海试点校文理三(22)]已知空间三个点 $P(-2,0,2)$，$Q(-1,1,2)$ 和 $R(-3,0,4)$. 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PR}$.

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ(用反三角函数表示).

(2)试确定实数 k，使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 互相垂直.

解 $\boldsymbol{a}=(-1+2,1-0,2-2)=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-3+2,0-0,4-2)=(-1,0,2)$.

(1)因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1\times1+1\times1+0\times0}=\sqrt{2}$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)(-1)+0\times0+2\times2}=\sqrt{5}$$

所以 $\cos\theta=\dfrac{1\times(-1)+1\times0+0\times2}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\theta=\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(2) $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k,k,0)+(-1,0,2)=(k-1,k,2)$，$k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(k,k,0)-(-2,0,4)=(k+2,k,-4)$. 因为 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，即 $(k-1)(k+2)+k\cdot k+2\times(-4)=0$，$2k^2+k-10=0$，$k=2$ 或 $-\dfrac{5}{2}$.

例 14 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，侧棱垂直于底面，A_1C_1 与 B_1D_1 交于 N，BC_1 与 B_1C 交于 M，且 $AM\perp BN$.

(1)求 AA_1 的长；

(2)对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，如果存在不全为零的 n 个实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$ 成立，则 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 叫线性相关，不是线性相关的向量叫线性无关，判断 $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN},\overrightarrow{CD}$ 是否线性相关，并说明理由.

解 (1)以 D 为原点 DA,DC,DD_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图 2.21 所示. 设 AA_1 的长为 a，则 $B(4,4,0)$，$N(2,2,a)$，所以 $\overrightarrow{BN}=(-2,-2,a)$，$A(4,0,0)$，$M\left(2,4,\dfrac{a}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{AM}=\left(-2,4,\dfrac{a}{2}\right)$. 由 $AM\perp BN$ 得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=0$，所以 $4-8+\dfrac{a^2}{2}=0$，则 $a=2\sqrt{2}$，即 AA_1 的长为 $2\sqrt{2}$.

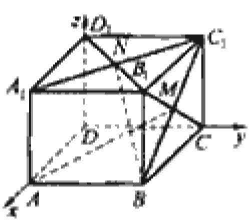


图 2.21

(2)由(1)得 $\overrightarrow{AM}=(-2,4,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BN}=(-2,-2,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CD}=(0,-4,0)$. 若 $\lambda_1(-2,4,\sqrt{2})+\lambda_2(-2,-2,2\sqrt{2})+\lambda_3(0,-4,0)=0$，则 $\begin{cases}-2(\lambda_1+\lambda_2)=0\\ \sqrt{2}(\lambda_1+2\lambda_2)=0\end{cases}$，所以 $\lambda_1=\lambda_2=0$，则 $\lambda_3=0$. 因此 $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN},\overrightarrow{CD}$ 线性无关.

例 15 如图 2.22，矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，E 是 CD 的中点，沿 AE 把三角形 ADE 折起，使 D 到 D_1 的位置，且 $D_1B=D_1C$. 试建立空间直角坐标系并求出点 D_1 在该坐标系下的坐标.

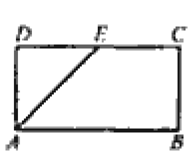


图 2.22

解 取 AB 中点 F，联结 EF，过 E 作 $Ez\perp$ 面 $ABCD$，

以 E 为坐标原点，分别以 EF,EC,Ez 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系如图 2.23 所示.

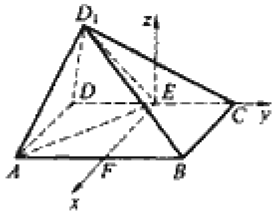


图 2.23

设 $D_1(x,y,z)(z>0)$，又 $E(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$A(1,-1,0)$.

由 $|D_1B|=|D_1C|$ 得

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2} \quad ①$$

由 $|D_1E|=|D_1A|$ 得

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2} \quad ②$$

由 $D_1E\perp D_1A$ 得

$$(x,y,z)\cdot(x-1,y+1,z)=0 \quad ③$$

由①，②，③联立，解得 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$，$z=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $D_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

（四）求垂足坐标的方法

1. 设 $PH\perp AB$ 于 H，要求垂足 H 的坐标.

（1）设参数法：如图 2.24，由 A,H,B 三点共线可设 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$，求出点 H 坐标（含参数 λ），再利用 $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，求出参数 λ 的值，从而求得 H 的坐标；

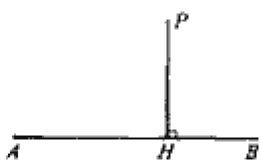


图 2.24

（2）设坐标法：设出点 H 坐标，利用 $\overrightarrow{AH}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线（对应坐标成比例）及 $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，列出方程组，解方程组求出点 H 坐标.

2. 如图 2.25，设 $PH\perp$ 平面 ABC 于 H，求垂足 H 的坐标.

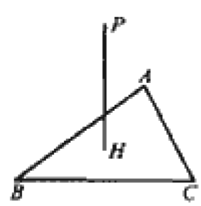


图 2.25

（1）由 H 在平面 ABC 上，可设 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$（或设 $\overrightarrow{PH}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}(x+y+z=1)$）. 再利用 $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AH}=0$，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$（或 $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$）即可求出 x,y（或 x,y,z），再由 $\overrightarrow{AH}$（或 $\overrightarrow{PH}$）坐标求出点 H 坐标.

（2）设 $H(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AH}=0$，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，解联立方程组求出 x,y,z.

例 16　正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E 为棱 DD_1 的中点，过 B_1 作 $B_1F\perp AE$ 于 F，建立空间直角坐标系，并求点 F 的坐标.

解一　（1）A 为坐标原点，AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图 2.26 所示. $E(0,2,1)$，$B_1(2,0,2)$. 设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AE}=$

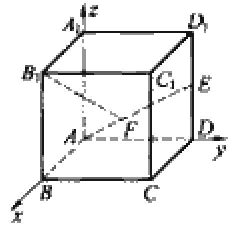


图 2.26

$(0,2\lambda,\lambda)$，则 $F(0,2\lambda,\lambda)$，$\overrightarrow{B_1F}=(-2,2\lambda,\lambda-2)$．由 $B_1F\perp AE$ 得 $\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=0+4\lambda+\lambda-2=5\lambda-2=0$，从而 $\lambda=\frac{2}{5}$，所以 $F(0,\frac{4}{5},\frac{2}{5})$．

解二 因为点 F 在平面 A_1ADD_1 内，所以可设 $F(0,y,z)$，则 $\overrightarrow{AF}=(0,y,z)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{B_1F}=(-2,y,z-2)$．由 $\overrightarrow{AF}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 共线，$\overrightarrow{B_1F}\perp\overrightarrow{AE}$ 得

$$\begin{cases}\frac{y}{2}=\frac{z}{1}\\2y+z-2=0\end{cases}，解得\begin{cases}y=\frac{4}{5}\\z=\frac{2}{5}\end{cases}，所以 F(0,\frac{4}{5},\frac{2}{5})．$$

解三 在 yOz 平面内，直线 AE 方程为：$z=\frac{1}{2}y$，因为 F 在 AE 上，所以可设 $F(0,y,\frac{1}{2}y)$，由 $\overrightarrow{B_1F}\perp\overrightarrow{AE}$ 得 $2y+\frac{1}{2}y-2=0$，解得 $y=\frac{4}{5}$，所以 $z=\frac{2}{5}$，则 $F(0,\frac{4}{5},\frac{2}{5})$．

例 17 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，E 在 D_1B_1 上，F 在 A_1D 上，且 $EF\perp D_1B_1$，$EF\perp A_1D$，建立如图 2.27 所示的直角坐标系 $D-xyz$，求点 E,F 的坐标．

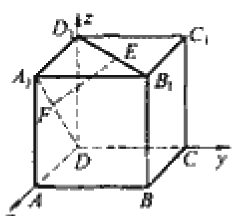


图 2.27

解 $D_1(0,0,3)$，$B_1(3,3,3)$，$A_1(3,0,3)$．设 $\overrightarrow{D_1E}=\lambda\overrightarrow{D_1B_1}=\lambda(3,3,0)=(3\lambda,3\lambda,0)$，所以 $E(3\lambda,3\lambda,3)$．又设 $\overrightarrow{DF}=\mu\overrightarrow{DA_1}=\mu(3,0,3)=(3\mu,0,3\mu)$，所以 $F(3\mu,0,3\mu)$，$\overrightarrow{EF}=(3\mu-3\lambda,-3\lambda,3\mu-3)$．又由

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=9(\mu-\lambda,-\lambda,\mu-1)\cdot(1,1,0)=9(\mu-2\lambda)=0 \quad ①$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=9(\mu-\lambda,-\lambda,\mu-1)\cdot(1,0,1)=9(2\mu-\lambda-1)=0 \quad ②$$

由①，②解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$，所以 $E(1,1,3)$，$F(2,0,2)$．

例 18 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PD=1$，E,F 分别为 AB,BC 的中点，过 D 作 $DH\perp$ 平面 PEF 于 H，试建立直角坐标系，并求点 H 的坐标．

解 以 D 为坐标原点，建立如图 2.28 所示的空间直角坐标系，则 $P(0,0,1)$，$A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$E(1,\frac{1}{2},0)$，$F(\frac{1}{2},1,0)$．

1)，$A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$E(1,\frac{1}{2},0)$，$F(\frac{1}{2},1,0)$.

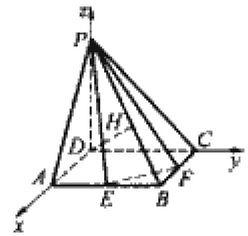


图 2.28

设$\overrightarrow{DH}=x\overrightarrow{DE}+y\overrightarrow{DF}+z\overrightarrow{DP}$（其中 $x+y+z=1$）$=(x+\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+y,z)$，$\overrightarrow{PE}=(1,\frac{1}{2},-1)$，$\overrightarrow{EF}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$. 由$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{PE}$得

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{PE}=x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+y)-z=0 \quad ①$$

同理由$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{EF}$，得

$$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0 \quad ②$$

又因为

$$x+y+z=1 \quad ③$$

由①，②，③解得 $x=y=\frac{4}{17}$，$z=\frac{9}{17}$，所以$\overrightarrow{DH}=\left(\frac{6}{17},\frac{6}{17},\frac{9}{17}\right)$，则$H\left(\frac{6}{17},\frac{6}{17},\frac{9}{17}\right)$.

解二　同解一得$\overrightarrow{PE}=(1,\frac{1}{2},-1)$，$\overrightarrow{EF}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$. 设 $H(x,y,z)$，则$\overrightarrow{DH}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{PH}=(x,y,z-1)$. 由$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{PE}=0$，$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{PH}=0$，得

$$\begin{cases}x+\frac{1}{2}y-z=0\\-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\\x^2+y^2+z(z-1)\end{cases}$$，解得 $z=\frac{9}{17}$，$x=y=\frac{6}{17}$，所以 $H\left(\frac{6}{17},\frac{6}{17},\frac{9}{17}\right)$.

（五）求两异面直线公垂线方向上的向量的方法

如图 2.29，设 $\boldsymbol{n}$ 为两异面直线AB，CD 的公垂线FE方向上的任一向量，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别为 AB，CD 方向上的任一向量，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{n}$ 可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 若设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由上两式可求得 x,y,z 的某一组值，于是可求得 $\boldsymbol{n}$. 若要求公垂线方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$.

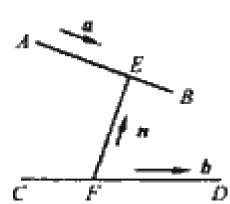


图 2.29

四、走进考场 5

1.［2007·安徽理二(13)］在四面体 $O-ABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.

D 为 BC 的中点，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{OE}=$ ________（用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示）.

2. 如图 2.30，$P-ABCD$ 是底面为菱形的四棱锥，E 为 PB 的中点，O 为 BD，AC 的交点，假设某一"基底"的"基向量"为：$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{k}$，试用"基向量"表示向量：(1) $\overrightarrow{PB}$；(2) $\overrightarrow{OE}$；(3) $\overrightarrow{CE}$.

3. 如图 2.31，已知 $ABCD$ 为正方形，P 是 $ABCD$ 所在平面外一点，P 在平面 $ABCD$ 上的射影恰好是正方形的中心 O，Q 是 CD 的中点，$\overrightarrow{PA}=x\overrightarrow{PO}+y\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PD}$，试求 x,y 的值.

4. [1995·上海(试点校)文理三(21)] 如图 2.32，在空间直角坐标系中，$BC=2$，原点 O 是 BC 的中点，点 A 的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，点 D 在平面 yz 上，且 $\angle BDC=90^\circ$，$\angle DCB=30^\circ$. 求向量 $\overrightarrow{OD}$ 的坐标.

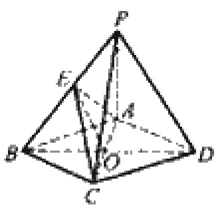


图 2.30

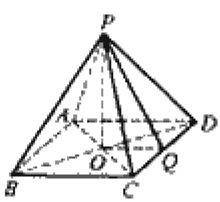


图 2.31

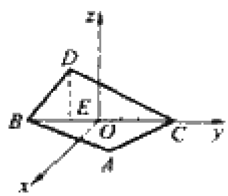


图 2.32

5. 已知空间三点 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,2)$. 是否存在实数 x,y 使得 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}$ 成立？若存在，求出 x,y 的值；若不存在，说明理由.

6. 已知：$\boldsymbol{a}=(x,4,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,y,-1)$，$\boldsymbol{c}=(3,-2,z)$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，求 (1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$；(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 所成的角（用反三角函数表示）.

7. 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{b}=$ ________.

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,1)$，点 $A(-3,-1,4)$，$B(-2,-2,2)$.

(1) 求 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

(2) 在直线 AB 上，是否存在一点 E，使得 $\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$（$O$ 为原点）.

9. 已知点 $A(1,2,1)$，$B(-1,3,4)$，$D(1,1,1)$，若 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则 $|\overrightarrow{PD}|$ 的值是 ________.

10. $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(1,-1,2)$，$B(5,-6,2)$，$C(1,3,-1)$，则 AC 边上的高 BD 等于（　　）

A. 5　　B. $\sqrt{41}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

五、提示与答案

1. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}$

2. $\overrightarrow{PB}=-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$

3. $x=2, y=-2$　提示：因为$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}$，所以$\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PC}$，又因为$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PQ}$，所以$\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PD}$

4. $(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　提示：过 D 作 $DE\perp BC$ 于 E，$OE=OB-BE=OB-BD\cos 60°$

5. 存在，$x=1, y=1$

6. (1)$\boldsymbol{a}=(2,4,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-4,-1)$，$\boldsymbol{c}=(3,-2,2)$　(2)$\pi-\arccos\frac{2}{19}$

7. $(-4,2-,4)$　提示：设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 代入 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$ 得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda|\boldsymbol{a}|^2=9\lambda=-18$

8. (1)$5\sqrt{2}$　(2)$E(-\frac{6}{5},-\frac{14}{5},\frac{2}{5})$　提示：(2)设$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}=(-3+t,-1-t,4-2t)$，由$\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{b}=0$得 $t=\frac{9}{5}$

9. $\frac{\sqrt{77}}{3}$　提示：设 $P(x,y,z)$，由$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$求得 $P(-\frac{1}{3},\frac{8}{3},3)$

10. A　提示：设$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$D(x,y,z)$，则 $D(1,4\lambda-1,2-3\lambda)$. 由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，求得 $\lambda=-\frac{4}{5}$

第三节　平面的法向量

一、高考内容

(一)点的位置向量

在空间中，我们取一定点 O 作为基底，P 为空间中任意一点，向量$\overrightarrow{OP}$称为点 P 的位置向量.

(二)平面内任意一点的表示法

设平面 α 内相交于点 O 的两条直线的方向向量为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，P 为平面 α 上

任意一点，则存在有序实数对(x,y)，使得$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

（三）平面的法向量

如果表示向量$\boldsymbol{a}$的有向线段所在直线垂直于平面α，则称这个向量垂直于平面α，记作$\boldsymbol{a}\perp\alpha$，如果$\boldsymbol{a}\perp\alpha$，那么向量$\boldsymbol{a}$叫平面的法向量，平面的法向量可以代表平面的方向.

二、高考要求（理科）

理解直线的方向向量与平面的法向量.

三、解法指导

（一）求平面法向量的方法

一般用待定系数法，首先设出平面法向量（$\boldsymbol{n}$）的坐标（令$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$），然后在该平面内找两个不共线的向量（$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$）. 根据法向量与这两个向量都垂直，由数量积等于0得到关于法向量坐标的方程组$\left(\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0\end{cases}\right)$，解方程组时可令其中的一个坐标为某一特殊值，便可求得另两个坐标的值，从而求得法向量的坐标. 若要求法向量方向上的单位向量$\boldsymbol{e}$（称单位法向量），则$\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$（即将法向量的各个坐标分别除以它的模）.

注意　(1)若在一个空间图形中，明显发现一条直线与一个平面垂直，那么这条直线的方向向量就是这个平面的法向量；

(2)平面的法向量的表达式不唯一，应取其最简形式为宜；

(3)平面xOy的一个法向量为$(0,0,1)$，平面yOz的一个法向量为$(1,0,0)$，平面xOz的一个法向量为$(0,1,0)$.

*(4)若空间图形是取三个向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$为一组基底，且$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$的模和两两间的夹角已知，要求平面$ABC$的法向量$\boldsymbol{n}$时，也可设$\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，同样由$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$，得$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. 解方程组并令$x,y,z$中的某个值为特殊值，即可求出$x,y,z$的值，从而要求得法向量$\boldsymbol{n}$的一个表达式.

例1　已知$A(1,2,1)$，$B(3,2,3)$，$C(5,3,1)$，求平面ABC的单位法向量$\boldsymbol{e}$.

解　设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面ABC的一个法向量，$\overrightarrow{AB}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AC}=(4,

1,0). 由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$,得$\begin{cases}2x+2z=0\\ 4x+y=0\end{cases}$,所以$\begin{cases}z=-x\\ y=-4x\end{cases}$,则 $\boldsymbol{n}=(x,-4x,-x)$(若令 $x=1$,可得一个法向量$(1,-4,-1)$),所以 $\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{(x,-4x,-x)}{\sqrt{x^2+16x^2+x^2}}=\pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6},-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},-\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$.

(二)平面法向量的应用

1. 利用平面的法向量可以判断一个点是否在该平面内,其方法是在平面(如△ABC)内取一点 M,如果点 P 与点 M 组成的向量($\overrightarrow{PM}$)与该平面的法向量垂直,那么点 P 就在该平面内,若$\overrightarrow{PM}$与该平面的法向量不垂直,点 P 就不在该平面内.

注意　要判断点 P 是否在平面 ABC 内,也可利用共面向量定理,设$\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$,看能否求出实数 x,y 的值,若能就在;若不能,就不在.

例 2　已知平面 α 内有一个点 $M(1,-1,2)$,平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(6,-3,6)$,则下列点 P 中,在平面 α 内的是　　　(　　)

A. $(-2,0,1)$　　B. $(2,3,3)$　　C. $(-4,4,0)$　　D. $(3,-3,4)$

解　验证 A: $\overrightarrow{PM}=(3,-1,1)$. 因为$\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=18+3+6\neq0$,所以 $P(-2,0,1)$不在 α 内.

验证 B: $\overrightarrow{PM}=(-1,-4,-1)$. 因为$\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=-6+12-6=0$,所以 $P(2,3,3)$在 α 内,应选 B.

2. 利用平面的法向量可以证线面平行和垂直、面面平行和垂直,可以求线面角、二面角,可以求点面距(线面距、面面距)、异面距(详见第三篇第二章).

四、走进考场 6

1. 如图 2.33,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,G,E,F 分别为 AA_1,AB,BC 的中点. (1)求平面 GEF 的法向量;(2)点 $H\left(\dfrac{5}{6},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6}\right)$是否在平面 GEF 内?

2. 设点 $C(2a+1,a+1,2)$在点 $P(2,0,0)$,$A(1,-3,2)$,$B(8,-1,4)$确定的平面内,求 a 的值.

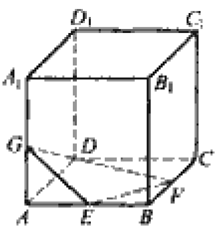


图 2.33

五、提示与答案

1.(1)$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$　(2)H 在平面 GEF 内

2.16　提示:**解一**　求出$\triangle PAB$ 的法向量$\boldsymbol{n}$,由$\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0$,求得 a 的值

解二　设$\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}(x,y\in\mathbf{R})$,得$\begin{cases}2a-1=-x+6y\\a+1=-3x-y\\2=2x+4y\end{cases}$,解方程组求出 a

第二篇

交汇篇

向量融形、数于一体，具有几何形式与代数形式的双重身份，使它成为中学数学知识的一个交汇点，成为联系众多数学知识内容的媒介，常与代数、三角、解析几何、立体几何等内容交汇. 由于向量是一个有“形”的几何量，因此在研究与向量相关的问题时，一定要结合图形进行分析、判断和求解，这是研究向量问题的重要方法和技巧.

在与其他知识的交汇中，常用到的平面向量的知识有：

(1)向量共线定理.

(2)平面向量基本定理的应用：$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}(\lambda_1+\lambda_2=1)\Leftrightarrow A,P,B$三点共线.

(3)向量运算和坐标运算，特别是数量积运算.

(4)相等向量概念的应用：常根据相等向量的坐标相同来列出方程组.

(5)两向量共线、垂直充要条件的应用.

(6)求向量模长、夹角的方法.

在解题时，常要将向量间的关系转化成坐标间的关系，通过坐标运算解决问题.

第三章　平面向量与代数的交汇

向量与代数交汇常表现为：以向量为工具，考察函数的图象与性质等问题．向量与数列的交汇题型比较新颖，如"点列"概念．解题时常是利用坐标，并结合平面向量模、数量积等相关知识，实现形到数的转化．在向量与不等式交汇的题目中出现了一种将向量问题转化为简单线性规划应用的新颖题型，其解法应引起同学们的注意．

一、解法指导

（一）与方程交汇

例1　［2006·湖南理一(5)］已知$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|\neq 0$，且关于$x$的方程$x^2+|\boldsymbol{a}|x+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$有实根，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角的取值范围是（　　）

A.$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B.$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$　　C.$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D.$\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$

解　由已知$\Delta=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant 0$，$|\boldsymbol{a}|^2\geqslant 4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．设$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\theta$，则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\times\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|}=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\leqslant\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\frac{1}{2}$，由于$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$，应选B.

（二）与集合、函数交汇

例2　［2004·安徽春理一(1)］已知向量集合$M=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(1,2)+\lambda(3,4),\lambda\in\mathbf{R}\}$，$N=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(-2,-2)+\lambda(4,5),\lambda\in\mathbf{R}\}$，则$M\cap N$等于（　　）

A.$\{(1,1)\}$　　B.$\{(1,1),(-2,-2)\}$

C.$\{(-2,-2)\}$　　D.$\varnothing$

解　设$\boldsymbol{a}\in M\cap N$，则存在实数$\lambda$和$\mu$，使得$(1,2)+\lambda(3,4)=(-2,-2)+\mu(4,5)$，即$(3,4)=(4\mu-3\lambda,5\mu-4\lambda)$.

所以$\begin{cases}4\mu-3\lambda=3\\5\mu-4\lambda=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}\lambda=-1\\\mu=0\end{cases}$，所以$\boldsymbol{a}=(-2,-2)$，应选C.

例3　［2005·上海理三(22)］如图3.1，在平面直角坐标系中，已知点

$P_1(1,2)$，$P_2(2,2^2)$，$P_3(3,2^3)$，…，$P_n(n,2^n)$，其中 n 是正整数，对平面上任一点 A_0，记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点，A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点，……，A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.

(1)求向量 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 的坐标；

(2)当点 A_0 在曲线 C 上移动时，点 A_2 的轨迹是函数 $y=f(x)$ 的图象，其中 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数，且当 $x\in(0,3]$ 时，$f(x)=\lg x$，求以曲线 C 为图象的函数在 $(1,4]$ 上的解析式；

(3)对任意偶数 n，用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 的坐标.

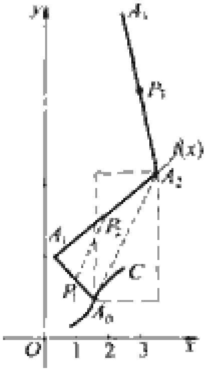


图 3.1

解 (1)由 $A_0P_1=P_1A_1$，$A_1P_2=P_2A_2$ 知 $\overrightarrow{A_0A_2}=2\overrightarrow{P_1P_2}=2(1,2)=(2,4)$.

(2)**解一** 因为 $\overrightarrow{A_2A_0}=-\overrightarrow{A_0A_2}=(-2,-4)$，所以曲线 C 可由函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位，再向下平移 4 个单位得到. 设函数 $y=g(x)$ 的图象是曲线 C，则 $x\in(-2,1]$ 时 $g(x)=f(x+2)-4=\lg(x+2)-4$. 由 $f(x)$ 的周期性知 $g(x)$ 也是以 3 为周期的函数，因此当 $x\in(1,4]$ 时，$g(x)=g(x-3)=\lg[(x-3)+2]-4=\lg(x-1)-4$.

解二 设 $A_0(x,y)$，$A_2(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_2-x=2\\y_2-y=4\end{cases}$，又设以曲线 C 为图象的函数为 $y=g(x)$，当 $x\in(1,4]$ 时，$x_2\in(3,6]$，$x_2-3\in(0,3]$. 因为 $f(x)$ 以 3 为周期，所以 $f(x_2)=f(x_2-3)=\lg(x_2-3)$.

因为 $\overrightarrow{A_0A_2}=(2,4)$，所以

$$g(x)=f(x+2)-4=\lg[(x+2)-3]-4=\lg(x-1)-4$$

(3) $\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}=2\overrightarrow{P_1P_2}+2\overrightarrow{P_3P_4}+\cdots+2\overrightarrow{P_{n-1}P_n}=$

$$2(\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_3P_4}+\cdots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n})=$$

$$2((1,2)+(1,2^3)+\cdots+(1,2^{n-1}))=$$

$$2\left(\frac{n}{2},\frac{2(4^{\frac{n}{2}}-1)}{4-1}\right)=\left(n,\frac{4(2^n-1)}{3}\right)$$

例 4 已知向量 $\boldsymbol{u}=(x,y)$ 与向量 $\boldsymbol{v}=(y,2y-x)$ 的对应关系用 $\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{u})$ 表示.

(1)证明：对任意的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及常数 m，n，恒有 $f(m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})=mf(\boldsymbol{a})+nf(\boldsymbol{b})$ 成立；

(2)设 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，求向量 $f(\boldsymbol{a})$ 与 $f(\boldsymbol{b})$ 的坐标；

(3)求使 $f(\boldsymbol{c})=(p,q)$(p,q 为常数)的向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标.

证明 (1)设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$,则

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(ma_1+nb_1,ma_2+nb_2)$$

所以

$$f(m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})=(ma_2+nb_2,2ma_2+2nb_2-ma_1-nb_1)$$

因为

$$mf(\boldsymbol{a})=m(a_2,2a_2-a_1),nf(\boldsymbol{b})=n(b_2,2b_2-b_1)$$

所以

$$mf(\boldsymbol{a})+nf(\boldsymbol{b})=(ma_2+nb_2,2ma_2+2nb_2-ma_1-nb_1)$$

则 $f(m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})=mf(\boldsymbol{a})+nf(\boldsymbol{b})$ 成立.

(2)$f(\boldsymbol{a})=(1,2\times1-1)=(1,1)$,$f(\boldsymbol{b})=(0,2\times0-1)=(0,-1)$.

(3)设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$,则 $f(\boldsymbol{c})=(y,2y-x)=(p,q)$,所以 $\begin{cases}y=p\\2y-x=q\end{cases}$,则 $\begin{cases}x=2p-q\\y=p\end{cases}$,所以 $\boldsymbol{c}=(2p-q,p)$.

例 5 平面内有向量 $\overrightarrow{OA}=(1,7)$,$\overrightarrow{OB}=(5,1)$,$\overrightarrow{OP}=(2,1)$,点 M 为直线 OP 上的一个动点,当 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 取最小值时,求 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

解 设 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$,因为点 M 在直线 OP 上,所以 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 共线,从而 $x-2y=0$.所以 $\overrightarrow{OM}=(2y,y)$,则 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(1-2y,7-y)$,$\overrightarrow{MB}=(5-2y,1-y)$,所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(1-2y)(5-2y)+(7-y)(1-y)=5y^2-20y+12=5(y-2)^2-8$.当且仅当 $y=2$ 时,$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 取得最小值 -8,此时 $\overrightarrow{OM}=(4,2)$.

例 6 已知三个平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个互相垂的单位向量,且 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=1$,$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=1$,$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$,则对任意的正实数 t,$|\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{a}+\frac{1}{t}\boldsymbol{b}|$ 的最小值是______.

解 $|\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{a}+\frac{1}{t}\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{c}^2+t^2\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{t^2}\boldsymbol{b}^2+2t\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\frac{2}{t}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

$$2+t^2+\frac{1}{t^2}+2t+\frac{2}{t}=(t+\frac{1}{t})^2+2(t+\frac{1}{t}) \quad ①$$

因为 $t\in\mathbf{R}$,所以 $t+\frac{1}{t}\geqslant2$.令 $u=t+\frac{1}{t}$($u\geqslant2$),代入式①得 $|\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{a}+\frac{1}{t}\boldsymbol{b}|^2=u^2+2u=(u+1)^2-1\geqslant(2+1)^2-1=8$,所以 $|\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{a}+\frac{1}{t}\boldsymbol{b}|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

(三)与数列交汇

例 7 [2006·江西理一(7)、文一(10)]已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若$\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$,且 A,B,C 三点共线(该直线不过点 O),则 S_{200}等于 ( )

A. 100　　B. 101　　C. 200　　D. 201

解 因为$\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$,且 A,B,C 三点共线,所以 $a_1+a_{200}=1$,则 $S_{200}=\dfrac{a_1+a_{200}}{2}\times 200=100$,应选 A.

例 8 设$\{a_n\}$是首项为 -10,公差为 2 的等差数列,$\{b_n\}$是首项为 $-\dfrac{1}{2}$,公差为$\dfrac{1}{2}$的等差数列,O 为坐标原点,向量$\overrightarrow{OA}=(-1,1)$,$\overrightarrow{OB}=(1,1)$,点列 P_n 满足$\overrightarrow{OP_n}=a_n\cdot\overrightarrow{OA}+b_n\cdot\overrightarrow{OB}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求证:$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 共线;

(2)若点 $P_k(k\in\mathbf{N}^*)$表示点列 P_n 中处于第一象限的点,求 k 的值.

解 (1)
$$a_n=2n-12,b_n=\frac{n}{2}-1$$
从而
$$\overrightarrow{OP_n}=(2n-12)\cdot(-1,1)+(\frac{n}{2}-1)\cdot(1,1)=(11-\frac{3n}{2},\frac{5n}{2}-13)$$
设 P_n 坐标为(x_n,y_n),则$\begin{cases}x_n=11-\dfrac{3}{2}n\\ y_n=\dfrac{5}{2}n-13\end{cases}$,消去 n 得 $5x_n+3y_n=16$,因此 P_1,$P_2,\cdots,P_n$ 共线(都在直线 $5x+3y=16$ 上).

(2) $\overrightarrow{OP_k}=\left(11-\dfrac{3}{2}k,\dfrac{5}{2}k-13\right)$,因为点 P_k 在第一象限,所以 $\begin{cases}11-\dfrac{3}{2}k>0\\ \dfrac{5}{2}k-13>0\end{cases}$,解得$\dfrac{26}{5}<k<\dfrac{22}{3}$.又 $k\in\mathbf{N}^*$,所以 k 的取值为 6 或 7.

例 9 在平面直角坐标系中,已知 $A_n(n,a_n)$,$B_n(n,b_n)$,$C_n(n-1,0)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$满足向量$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$与向量$\overrightarrow{B_nC_n}$共线,且点 $B_n(n,b_n)(n\in\mathbf{N}^*)$都在斜率为 6 的同一条直线上.

(1)试用 a_1,b_1 与 n 来表示 a_n;

(2)设 $a_1=a,b_1=-a$,且 $12<a\leqslant 15$,求数列$\{a_n\}$中的最小值的项.

解　(1)因为点 $B_n(n,b_n)(n\in\mathbf{N}^*)$ 都在斜率为 6 的同一条直线上，所以 $\dfrac{b_{n+1}-b_n}{(n+1)-n}=6$，即 $b_{n+1}-b_n=6$，于是数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，故 $b_n=b_1+6(n-1)$．又 $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=(1,a_{n+1}-a_n)$，$\overrightarrow{B_nC_n}=(-1,-b_n)$，$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ 与 $\overrightarrow{B_nC_n}$ 共线，所以

$$1\times(-b_n)-(-1)(a_{n+1}-a_n)=0$$

即 $a_{n+1}-a_n=b_n$，于是当 $n\geqslant 2$ 时

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=$$
$$a_1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=a_1+b_1(n-1)+3(n-1)(n-2)$$

当 $n=1$ 时，上式也成立，故

$$a_n=a_1+b_1(n-1)+3(n-1)(n-2)$$

(2)把 $a_1=a$，$b_1=-a$ 代入上式得

$$a_n=a-a(n-1)+3(n-1)(n-2)=3n^2-(9+a)n+6+2a$$

因为 $12<a\leqslant 15$，所以 $\dfrac{7}{2}<\dfrac{9+a}{6}\leqslant 4$，即当 $n=4$ 时，a_n 取最小值为 $a_4=18-2a$．

(四)与不等式交汇

例 10　[2008·上海春文理三(21)]在平面直角坐标 xOy 上的一列点 $A_1(1,a_1)$，$A_2(2,a_2)$，$\cdots$，$A_n(n,a_n)$，$\cdots$简记为 $\{A_n\}$．若由 $b_n=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ 等构成的数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}>b_n$，$n=1,2,3,\cdots$，其中 $\boldsymbol{j}$ 为方向与 y 轴正方向相同的单位向量，则称 $\{A_n\}$ 为 T 点列．

(1)判断 $A_1(1,1)$，$A_2(2,\frac{1}{2})$，$A_3(3,\frac{1}{3})$，$\cdots$，$A_n(n,\frac{1}{n})$，$\cdots$是否为 T 点列，并说明理由；

(2)若 $\{A_n\}$ 为 T 点列，且点 A_2 在点 A_1 的右上方，任取其中连续三点 A_k，A_{k+1}，A_{k+2}，判断 $\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 的形状(锐角三角形、直角三角形、钝角三角形)，并予以证明；

*(3)若 $\{A_n\}$ 为 T 点列，正整数 $1\leqslant m<n<p<q$ 满足 $m+q=n+p$，求证：$\overrightarrow{A_nA_q}\cdot\boldsymbol{j}>\overrightarrow{A_mA_p}\cdot\boldsymbol{j}$．

解　(1)由题设 $a_n=\dfrac{1}{n}$，所以

$$b_n=(1,a_{n+1}-a_n)\cdot(0,1)=a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{-1}{n(n+1)}$$

则 $b_{n+1}=-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$，因为 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}>0$，所以 $b_{n+1}>b_n$，则 $\{A_n\}$ 是 T 点列．

(2)在$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$中

$$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}=(-1,a_k-a_{k+1})$$

$$\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=(1,a_{k+2}-a_{k+1})$$

$$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=-1+(a_{k+2}-a_{k+1})(a_k-a_{k+1})$$

因为点 A_2 在点 A_1 的右上方，所以 $b_1=a_2-a_1>0$，因为$\{A_n\}$为 T 点列，所以 $b_n\geqslant b_1>0$，则

$$(a_{k+2}-a_{k+1})(a_k-a_{k+1})=-b_{k+1}b_k<0$$

所以$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}<0$，于是$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$为钝角，因此$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$为钝角三角形.

(3)因为 $1\leqslant m<n<p<q$，$m+q=n+p$，所以

$$q-p=n-m>0 \qquad ①$$

$$a_q-a_p=a_q-a_{q-1}+a_{q-1}-a_{q-2}+\cdots+a_{p+1}-a_p=$$
$$b_{q-1}+b_{q-2}+\cdots+b_p\geqslant(q-p)b_p \qquad ②$$

同理

$$a_n-a_m=b_{n-1}+b_{n+2}+\cdots+b_m\leqslant(n-m)b_{n-1} \qquad ③$$

由于$\{A_n\}$为 T 点列，所以

$$b_p>b_{n-1} \qquad ④$$

由①，②，③，④可得 $a_q-a_p>a_n-a_m$，所以 $a_q-a_n>a_p-a_m$，即

$$\overrightarrow{A_nA_q}\cdot\boldsymbol{j}>\overrightarrow{A_mA_p}\cdot\boldsymbol{j}$$

例 11 [2005·江苏文、理二(18)]在$\triangle ABC$ 中，O 为中线 AM 上的一个动点，若 $AM=2$，则$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$的最小值是________.

解 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OM}|\cdot\cos 180^\circ=-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OM}|$，而$|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OM}|=2$，所以$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OM}|\leqslant\left(\frac{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OM}|}{2}\right)^2=1$，当且仅当$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OM}|$，即 O 为中线 AM 的中点时，等号成立，所以$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\geqslant-2$，即$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$的最小值为 -2.

例 12 如图 3.2，点 P 在$\triangle MOA$ 的边界和它的内部运动，且$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x,y\in\mathbf{R})$，则当 y 取最大值时，x 的取值范围是________.

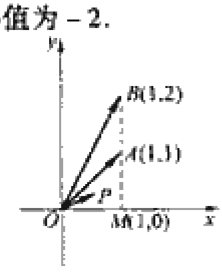


图 3.2

解 设$\overrightarrow{OP}=(m,n)$，因为点 P 在$\triangle MOA$ 的边界和它的内部运动，所以 $0\leqslant m\leqslant1$，$0\leqslant n\leqslant1$，$m-n\geqslant0$. 又$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，所以$(m,n)=x(1,1)+y(1,2)=(x+y,x+2y)$.

则$\begin{cases} m=x+y \\ n=x+2y \end{cases}$，所以$\begin{cases} 0\leqslant x+y\leqslant 1 \\ 2x+2y\leqslant 1 \\ y\leqslant 0 \end{cases}$，因此 $y_{max}=0$. 当 $y=0$ 时，$0\leqslant x\leqslant 1$，即 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 1$.

例 13 如图 3.3，设 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$，点 P 是线段 AB 上的一个动点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，求实数 λ 的取值范围.

解 设 $P(x,y)$，因为 AB 方程为 $x+y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$，而点 P 在线段 AB 上，所以 $y=1-x$，即 $P(x,1-x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{PA}=(1-x,x-1)$，$\overrightarrow{PB}=(-x,x)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1)$. 因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，所以 $(x,1-x)\cdot(-1,1)\geqslant(1-x,x-1)\cdot(-x,x)$，$2x^2\leqslant 1$，所以 $0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 得 $(x-1,1-x)=(-\lambda,\lambda)$，所以 $\lambda=1-x$，而 $-x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right]$，所以 $\lambda\in\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

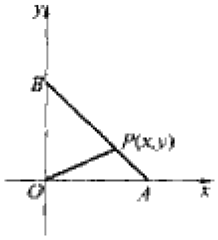


图 3.3

二、走进考场 7

1.［2007·湖南理一(4)］设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零向量，若函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b})$ 的图象是一条直线，则必有 ( )

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$　　C. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　　D. $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$

2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，若存在实数 k 和 t，使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(t^2-3)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$，试求 k 的函数解析式 $k=f(t)$.

三、答案与提示

1. A　提示：$f(x)=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}x^2+(|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2)x+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，由题意知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

2. $k=\frac{4t^3-10t}{2t^2-1}$　**解一**　$\boldsymbol{x}=(2t^2-3,2t^2-7)$，$\boldsymbol{y}=(-3k+2t,k+2t)$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$

解二　$\boldsymbol{a}^2=10$，$\boldsymbol{b}^2=8$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，由 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$ 得 $-k\boldsymbol{a}^2-(t^2-3)k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(t^2-3)t\boldsymbol{b}^2=0$

第四章　平面向量与三角函数的交汇

平面向量与三角的交汇是以三角题型为背景的一种向量描述.在向量与三角交汇的题目中,向量的作用是通过向量运算的几何意义或坐标运算将向量问题转化为三角的问题,即间接给出三角函数的等式或解析式(尤其是化归为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 型的函数式),利用三角的相关知识来解答(解题时常须作出图来).三角知识是考查的主体,在这种类型的试题中常用到的向量知识有:平面向量坐标和数量积的运算,模长、夹角的计算,平行、垂直、相等的充要条件,平面向量分解定理及平移等知识,解题时有时还须先建立直角坐标系.

一、解法指导

(一)与三角函数的图象和性质交汇

例1　[2008·浙江理一(9)]已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量,若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解　由已知得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2=0$, $|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>$,即 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}\cos<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>$.当 $\cos<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>=1$ 时,$|\boldsymbol{c}|$ 取得最大值 $\sqrt{2}$,应选 C.

例2　[2008·福建理三(17)]已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin A,\cos A)$,$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1)$,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$,且 A 为锐角.

(1)求角 A 的大小;

(2)求函数 $f(x)=\cos 2x+4\cos A\sin x\ (x\in\mathbf{R})$ 的值域.

解　(1)由题意得 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$,即 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$,所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.由 A 为锐角得 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $\cos A=\frac{1}{2}$,所以

$$f(x)=\cos 2x+2\sin x=1-2\sin^2 x+2\sin x=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

因为 $x\in\mathbf{R}$,所以 $\sin x\in[-1,1]$.因此,当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 有最大值 $\frac{3}{2}$;当 $\sin x=-1$ 时,$f(x)$ 有最小值 -3,所以所求函数 $f(x)$ 的值域是 $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

例3 [2006·湖北理三(16)]设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,其中向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,-\cos x)$,$\boldsymbol{b}=(\sin x,-3\cos x)$,$\boldsymbol{c}=-(\cos x,\sin x)$,$x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最大值和最小正周期;

(2)将函数 $y=f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{d}$ 平移,使平移后得到的图象关于坐标原点成中心对称,求长度最小的 $\boldsymbol{d}$.

解 (1)如图4.1,$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\sin x,-\cos x)\cdot(\sin x-\cos x,\sin x-3\cos x)=\sin^2x-2\sin x\cos x+3\cos^2x=2+\cos 2x-\sin 2x=2+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$,所以 $f(x)$ 的最大值为 $2+\sqrt{2}$,最小正周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由 $\sin(2x+\frac{3\pi}{4})=0$,得 $2x+\frac{3\pi}{4}=k\pi$,$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}$,$k\in\mathbf{Z}$.要使 $y=f(x)$ 的图象平移后得到的图象关于坐标原点成中心对称,只需将点 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8},2\right)$ 平移至 $O(0,0)$,所以平移向量 $\boldsymbol{d}=\left(-\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},-2\right)$,$|\boldsymbol{d}|=\sqrt{\left(-\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)^2+4}$,要使 $|\boldsymbol{d}|$ 最小,须 $\frac{3\pi}{8}-\frac{k\pi}{2}=0$,$k=\frac{3}{4}$.由于 k 是整数,所以 $k=1$,这时 $\boldsymbol{d}=\left(-\frac{\pi}{8},-2\right)$.

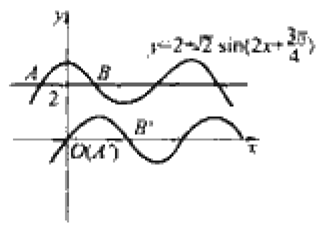


图 4.1

例4 [2005·江西文理一(11)]在△OAB 中,O 为坐标原点,$A(1,\cos\theta)$,$B(\sin\theta,1)$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,则当△$OAB$ 的面积达最大值时,θ 为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

解 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=$

$\frac{1}{2}\sqrt{(1+\cos^2\theta)(1+\sin^2\theta)-(\cos\theta+\sin\theta)^2}=$

$\frac{1}{2}\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta}=$

$\frac{1}{2}(1-\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta$

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<2\theta<\pi$，则 $0\leqslant\sin 2\theta\leqslant 1$．所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$S_{\triangle OAB}$取得最大值$\frac{1}{2}$，应选 D.

例 5 [2004·湖北文理三(19)]如图 4.2，在 Rt△ABC 中，已知 $BC=a$，若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点，问$\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角 θ 取何值时$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$的值最大，并求出这个最大值.

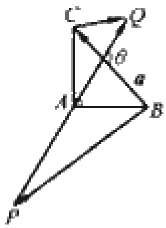


图 4.2

解一 因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. 又因为$\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DQ}=(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\pi-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+0=-a^2+\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=-a^2-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CB}=-a^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=-a^2+\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a\cdot\cos\theta=-a^2+a^2\cos\theta$.

所以当 $\cos\theta=1$，即 $\theta=0$（$\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$方向相同）时，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$最大，其最大值为 $-a^2+a^2\times 1=0$.

解二 以直角顶点 A 为坐标原点，两直角边所在直线为坐标轴建立直角坐标系，如图 4.3 所示.

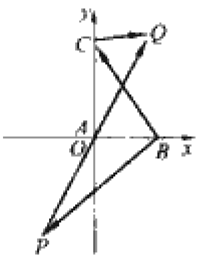


图 4.3

设$|AB|=c$，$|AC|=b$，则 $B(c,0)$，$C(0,b)$. 设 $P(x,y)$，则 $Q(-x,-y)$，所以$\overrightarrow{BP}=(x-c,y)$，$\overrightarrow{CQ}=(-x,-y-b)$，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=(x-c)(-x)+y(-y-b)=-(x^2+y^2)+cx-by$. 因为 $x^2+y^2=|PA|^2=a^2$，$\overrightarrow{PQ}=(-2x,-2y)$，$\overrightarrow{BC}=(-c,b)$，所以 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{2cx-2by}{2a\cdot a}=\frac{cx-by}{a^2}$，则 $cx-by=a^2\cos\theta$，所以$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-a^2+a^2\cos\theta$. 同上，当 $\theta=0$ 时$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$最大，最大值为 0.

例 6 [2006·浙江理三(15)、文三(16)]如图 4.4，函数 $y=2\sin(7x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$（其中 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\varphi}{2}$）的图象与 y 轴交于点(0,1).

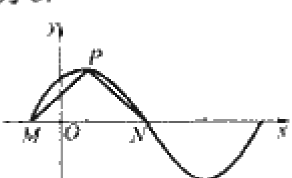


图 4.4

(1)求 φ 的值；

(2)设 P 是图象上的最高点，M，N 是图象与 x 轴的交点，求$\overrightarrow{PM}$与$\overrightarrow{PN}$的夹角.

解 (1)$\varphi=\frac{\pi}{6}$，解法略.

(2)由 $y=2\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})$及其图象知 $M(-\frac{1}{6},0)$，$P(\frac{1}{3},2)$，$N(\frac{5}{6},0)$，所以$\overrightarrow{PM}=(-\frac{1}{2},-2)$，$\overrightarrow{PN}=(\frac{1}{2},-2)$，从而 $\cos<\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}>=\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PM}||\overrightarrow{PN}|}=\frac{15}{17}$，所以$<\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}>=\arccos\frac{15}{17}$.

例7 若 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，且$|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|$，$k>0$，$k\in\mathbf{R}$.

(1)试用 k 表示$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2)求实数 k 的取值范围；

(3)求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值、最小值，并求出取得最值时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的大小.

解 (1)因为$|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|$，所以

$$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=3(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})^2,k^2\boldsymbol{a}^2+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3\boldsymbol{a}^2-6k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3k^2\boldsymbol{b}^2$$

又因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{k^2+1}{4k}$.

(2)因为$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，所以$\frac{k^2+1}{4k}\leqslant1$. 因为 $k>0$，所以 $k^2-4k+1\leqslant0$，所以 $2-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant2+\sqrt{3}$.

(3)因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{k^2+1}{4k}=\frac{1}{4}(k+\frac{1}{k})\geqslant\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$，当且仅当 $k=\frac{1}{k}$，即 $k=1$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 取得最小值：$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})_{\min}=\frac{1}{2}$，此时 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，所以 $\theta=60^\circ$；当且仅当 $k=2\pm\sqrt{3}$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 取得最大值 1，此时 $\cos\theta=1$，$\theta=0^\circ$.

例8 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\cos\frac{3}{2}x,\sin\frac{3}{2}x\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(\cos\frac{x}{2},-\sin\frac{x}{2}\right)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 若函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2t|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的最小值为$-\frac{3}{2}$，求 t 值.

解
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{3}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2}=\cos2x$$
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1+2\cos2x=4\cos^2x$$

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\cos x$，则

$$f(x)=\cos2x-2t\cdot2\cos x=2\cos^2x-4t\cos x-1$$

令 $m=\cos x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $m\in[0,1]$，所以 $f(x)=g(m)=2m^2-4tm-1$，$m\in[0,1]$，$g(m)$图象是开口向上的抛物线，其对称轴 $m=t$.

①当 $t<0$ 时，由图象知$[0,1]$为 $g(m)$的单调增区间，$f(x)_{\min}=g(0)=$

-1,不合题意.

②当 $t>1$ 时,$[0,1]$ 为 $g(m)$ 的单调减区间,$f(x)_{\min}=g(1)=1-4t=-\frac{3}{2}$,$t=\frac{5}{8}<1$,不合题意.

③当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,$f(x)_{\min}=f(t)=2t^2-4t^2-1$,即 $-2t^2-1=-\frac{3}{2}$,解得 $t=\pm\frac{1}{2}$.因为 $0\leqslant t\leqslant 1$,所以 $t=\frac{1}{2}$.

综上所述,$t=\frac{1}{2}$.

例 9 已知 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $45°$,求使向量 $(2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$ 与 $(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ 的夹角是锐角的 λ 的取值范围.

解 由 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $45°$,则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 45°=\sqrt{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

而

$$(2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=2\lambda\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\lambda\boldsymbol{b}^2=\lambda^2+\lambda-6$$

设向量 $(2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$ 与 $(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ 的夹角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{(2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})}{|2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}||\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|}>0$$

且 $\cos\theta\neq 1$,所以

$$(2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})>0,\lambda^2+\lambda-6>0$$

所以 $\lambda>2$ 或 $\lambda<-3$.

假设 $\cos\theta=1$,则 $2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=k(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(k>0)$,所以 $\begin{cases}2=k\lambda\\ \lambda=-3k\end{cases}$,解得 $k^2=-\frac{2}{3}$,故使向量 $2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 夹角为 0 的 λ 不存在,所以当 $\lambda>2$ 或 $\lambda<-3$ 时,向量 $(2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$ 与 $(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ 的夹角是锐角.

例 10 [2006·全国卷Ⅱ理三(17)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\theta,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,\cos\theta)$,$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

(1)若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,求 θ;

(2)求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最大值.

解 (1)若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\sin\theta+\cos\theta=0$,所以 $\tan\theta=-1$,因为 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$,所以 $\theta=-\frac{\pi}{4}$.

(2) $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\sin\theta+1,1+\cos\theta)$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\sin\theta+1)^2+(1+\cos\theta)^2}=\sqrt{3+2(\sin\theta+\cos\theta)}=\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=1$,即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 取得最大值 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$.

(二)与三角恒等变换交汇

例 11 [2007·天津理一(10)]设两个向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda+2,\lambda^2-\cos^2\alpha)$ 和 $\boldsymbol{b}=\left(m,\frac{m}{2}+\sin\theta\right)$,其中 λ,m,α 为实数.若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,则 $\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围是 ( )

A. $[-6,1]$　B. $[4,8]$　C. $(-\infty,1]$　D. $[-1,6]$

解 由 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$ 得

$$\begin{cases}\lambda+2=2m & ①\\ \lambda^2-\cos^2\alpha=m+2\sin\alpha & ②\end{cases}$$

令 $\frac{\lambda}{m}=k$,则 $\lambda=mk$,代入①得:$m=\frac{2}{2-k}(k\neq2)$;代入②得:

$$\frac{4k^2}{(2-k)^2}-\frac{2}{2-k}=-(\sin\alpha-1)^2+2$$

又 $-2\leqslant-(\sin\alpha-1)^2+2\leqslant2$,所以

$$-2\leqslant\frac{4k^2}{(2-k)^2}-\frac{2}{2-k}\leqslant2$$

$$-1\leqslant\frac{2k^2+k-2}{(2-k)^2}\leqslant1,\ -k^2+4k-4\leqslant2k^2+k-2\leqslant k^2-4k+4$$

$$\begin{cases}3k^2-3k+2\geqslant0\\ k^2+5k-6\leqslant0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}k\in\mathbf{R}\\ -6\leqslant k\leqslant1\end{cases}$,合并得 $k\in[-6,1]$,应选 A.

例 12 [2007·安徽理三(16)]已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$,β 为 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{8})$ 的最小正周期,$\boldsymbol{a}=(\tan(\alpha+\frac{1}{4}\beta),-1)$,$\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,2)$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m$,求 $\frac{2\cos^2\alpha+\sin2(\alpha+\beta)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 的值.

解 因为 β 为 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{8})$ 的最小正周期,所以 $\beta=\pi$.因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m$,又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\alpha\cdot\tan(\alpha+\frac{1}{4}\beta)-2$,故

$$\cos\alpha\cdot\tan(\alpha+\frac{1}{4}\beta)=m+2$$

由于 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，所以

$$\frac{2\cos^2\alpha+\sin 2(\alpha+\beta)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha+\sin(2\alpha+2\pi)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$$
$$\frac{2\cos\alpha+(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=2\cos\alpha\cdot\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=$$
$$2\cos\alpha\cdot\tan\alpha(\alpha+\frac{\pi}{4})=\alpha(2+m)$$

例 13 [2006·北京文二(12)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角的大小是________.

解一

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\cos\alpha+\cos\beta,\sin\alpha+\sin\beta)$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\cos\alpha-\cos\beta,\sin\alpha-\sin\beta)$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)+$$
$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)=$$
$$\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\sin^2\alpha-\sin^2\beta=0$$

因为 $\cos<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}>=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=0$，所以 $<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}>=\frac{\pi}{2}$.

解二 $\cos<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}>=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}$，而

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1,|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta}=1$$

所以 $\cos<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}>=0$，则 $<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}>=\frac{\pi}{2}$.

注意 两种解法以解法二(即先化简)为好.

例 14 [2005·山东文理三(17)]已知向量 $\boldsymbol{m}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 和 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2}-\sin\theta,\cos\theta)$，$\theta\in(\pi,2\pi)$，且 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\frac{8\sqrt{2}}{5}$，求 $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$ 的值.

解

$$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2},\cos\theta+\sin\theta)$$
$$|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2})^2+(\cos\theta+\sin\theta)^2}=$$
$$\sqrt{4+2\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta)}=\sqrt{4+4\cos(\theta+\frac{\pi}{4})}=$$
$$2\sqrt{1+\cos(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

由已知 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\frac{8\sqrt{2}}{5}$，所以 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{7}{25}$. 又 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=$

$2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)-1$，所以 $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{16}{25}$. 因为 $\pi<\theta<2\pi$，所以 $\frac{5\pi}{8}<\frac{\theta}{2}<$ $\frac{\pi}{8}<\frac{9\pi}{8}$，所以 $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)<0$，则 $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{4}{5}$.

例 15　已知向量 $\boldsymbol{a}=(1-\tan x,1)$，$\boldsymbol{b}=(1+\sin 2x+\cos 2x,0)$，记 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1)求 $f(x)$的解析式并指出它的定义域；

(2)若 $f(\alpha+\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2}}{5}$，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $f(\alpha)$.

解　(1)由已知得

$$f(x)=(1-\tan x)(1+\sin 2x+\cos 2x)=$$
$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}\cdot 2(\cos^2 x+\sin x\cos x)=2(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos^2 x$$

定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)因为 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{5}$，即 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}>0$，所以 $2\alpha+\frac{\pi}{4}$为锐角，则

$$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$f(\alpha)=2\cos 2\alpha=2\cos\left[(2\alpha+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4}\right]=$$
$$2\left[\cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}+\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right]=$$
$$2\left[\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\frac{8}{5}$$

例 16　设 $\boldsymbol{a}=(1+\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(1-\cos\beta,\sin\beta)$，$\boldsymbol{c}=(1,0)$，$\alpha\in(0,\pi)$，$\beta\in(\pi,2\pi)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ_1，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ_2，且 $\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{6}$，求 $\sin\frac{\alpha-\beta}{4}$的值.

解　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1+\cos\alpha)}=$

$$\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\cos\frac{\alpha}{2}(因为 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2})$$

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(1-\cos\beta)^2+\sin^2\beta}=\sqrt{2(1-\cos\beta)}=$

$$\sqrt{4\sin^2\frac{\beta}{2}}=2\sin\frac{\beta}{2}(因为\frac{\pi}{2}<\frac{\beta}{2}<\pi)$$

$|\boldsymbol{c}|=1$，又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1-\cos\beta=2\sin^2\frac{\beta}{2}$．所以

$$\cos\theta_1=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\theta_2=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}=\sin\frac{\beta}{2}$$

因为$\frac{\alpha}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\theta_1=\frac{\alpha}{2}$；因为$\frac{\beta}{2}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$0<\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$，由 $\cos\theta_2=\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\theta_2=\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}$．因为 $\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{6}$，所以$\frac{\alpha}{2}-\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$，$\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{\pi}{3}$，所以 $\sin\frac{\alpha-\beta}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$．

（三）与解三角形交汇

例 17 ［2008·山东理二(15)、文一(8)］已知 a,b,c 为$\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边，向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$，若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，且 $a\cos B+b\cos A=c\sin C$．

［理科］则$\angle B=$________．

［文科］则$\angle A$，$\angle B$ 的大小分别为　　　　（　　）

A. $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$　　　　B. $\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}$　　　　C. $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$　　　　D. $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$

解　［理科］由已知 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，所以$\sqrt{3}\cos A-\sin A=0$．因为 $\cos A\neq0$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$．又因为 $a\cos B+b\cos A=c\sin C$，所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin^2C$，$\sin(A+B)=\sin^2C$，$\sin(\pi-C)=\sin^2C$，$\sin C=\sin^2C$，所以 $\sin C=1$（$\sin C=0$ 不合），所以 $C=\frac{\pi}{2}$，则 $B=\frac{\pi}{6}$．

［文科］　应选 C．

例 18 ［2007·山东文三(17)］在$\triangle ABC$ 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边分别为 a,b,c，$\tan\angle C=3\sqrt{7}$．

(1)求 $\cos\angle C$；

(2)若$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{5}{2}$，且 $a+b=9$，求 c．

解　(1)$\cos\angle C=\frac{1}{8}$，解法略．

(2)因为$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{5}{2}$,所以 $ab\cos\angle C=\frac{5}{2}$,则 $ab=20$,又因为 $a+b=9$,平方得 $a^2+2ab+b^2=81$,所以 $a^2+b^2=41$,则 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C=36$,所以 $c=6$.

例 19　[2006·辽宁理一(6)、文一(9)]△ABC 的三内角 A,B,C 所对边的长分别为 a,b,c,设向量 $\boldsymbol{p}=(a+c,b)$,$\boldsymbol{q}=(b-a,c-a)$,若 $\boldsymbol{p}/\!/\boldsymbol{q}$,则$\angle C$ 的大小为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

解　由 $\boldsymbol{p}/\!/\boldsymbol{q}$ 得 $(a+c)(c-a)=b(b-a)$,即 $c^2-a^2=b^2-ab$,所以 $\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$,所以$\angle C=\frac{\pi}{3}$,应选 B.

例 20　不顾国际社会的强烈反对,美国于 2001 年 7 月 14 日进入导弹防御系统的导弹拦截技术的第四次试验.美军先从加利福尼亚州的范登堡空军基地发射一枚作为标靶的洲际弹道导弹,再从 7 000 多公里以外的马绍尔群岛的环礁基地发射另一枚导弹对标靶导弹实施拦截,实施拦截时必须准确计算标靶的飞行速度、瞬时位置.现假设标靶与拦截导弹的飞行轨迹均在同一平面内,标靶飞行速度为 $|\boldsymbol{v}|=10n$ km/h,令 $\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$,基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是上述平面内的单位向量,若标靶的飞行方向为北偏东 30°,$\boldsymbol{e}_1$ 的方向为正东,$\boldsymbol{e}_2$ 的方向为北偏东 60°,试求实数 λ_1,λ_2 的值.

解　建立如图 4.5 所示的直角坐标系,则 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$,$\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.因为 $|\boldsymbol{v}|=10n$,$\angle vOx=60°$,所以 $\boldsymbol{v}=(5n,5\sqrt{3}n)$.又因为 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线,所以 $\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\lambda_1(1,0)+\lambda_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\lambda_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2,\frac{1}{2}\lambda_2\right)$,则 $\begin{cases}\lambda_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2=5n\\ \frac{1}{2}\lambda_2=5\sqrt{3}n\end{cases}$,解得 $\lambda_1=-10n$,$\lambda_2=10\sqrt{3}n$.

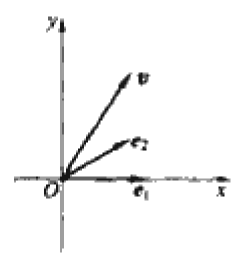


图 4.5

***例 21**　[2006·天津理二(16)]设函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$,点 A_0 表示坐标原点,点 $A_n(n,f(n))(n\in\mathbf{N}^*)$,若向量 $\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$,$\theta_n$ 是 $\boldsymbol{a}_i$ 与 $\boldsymbol{i}$ 的夹角(其中 $\boldsymbol{i}=(1,0)$),设 $S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ ______.

解 $a_n=\overrightarrow{A_0A_n}=(n,f(n))=(n,\frac{1}{n+1})$,所以

$$\tan\theta_n=\frac{\frac{1}{n+1}}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

则

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$.

二、走进考场 8

1.[2008·福建文三(17)]已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin A,\cos A)$,$\boldsymbol{n}=(1,-2)$,且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

(1)求 $\tan A$ 的值;

(2)求函数 $f(x)=\cos 2x+\tan A\cdot\sin x(x\in\mathbf{R})$的值域.

2.[2008·浙江文二(16)]已知 $\boldsymbol{a}$ 是平面内的单位向量,若向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,则$|\boldsymbol{b}|$的取值范围是________.

*3.[2007·湖北理三(16)]已知△ABC 的面积为 3,且满足 $0\leqslant\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqslant6$,设$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$的夹角为$\theta$.

(1)求 θ 的取值范围;

(2)求函数 $f(\theta)=2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\theta)-\sqrt{3}\cos 2\theta$ 的最大值与最小值.

4.[2007·陕西文、理三(17)]设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,其中向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos 2x)$,$\boldsymbol{b}=(1+\sin 2x,1)$[文科:$\boldsymbol{a}=(m,\cos x)$,$\boldsymbol{b}=(1+\sin x,1)$],$x\in\mathbf{R}$,且函数 $y=f(x)$的图象经过点$(\frac{\pi}{4},2)$[文科:且$f(\frac{\pi}{2})=2$].

(1)求实数 m 的值;

(2)[理科]求函数 $f(x)$的最小值及此时 x 值的集合;

[文科]求函数 $f(x)$的最小值.

5.[2007·广东文三(16)]已知△ABC 三个顶点的直角坐标分别为$A(3,4)$,$B(0,0)$,$C(c,0)$.

(1)若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,求 C 的值;

(2)若 $c=5$,求 $\sin A$ 的值.

6.[2006·湖北文三(16)]设向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,\cos x)$,$\boldsymbol{b}=(\cos x,\cos x)$,$x\in$

$\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

(1)求函数 $f(x)$的最大值与最小正周期；

(2)求使不等式 $f(x)\geqslant\frac{3}{2}$成立的 x 的取值集合.

7.[2006·江西文二(13)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sin\theta)$，$\boldsymbol{b}=(1,\cos\theta)$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最大值为________.

8.[2006·四川理三(17)，文三(18)]已知 A,B,C 是△ABC 的三内角，向量 $\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$，且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$.

(1)求∠A；

(2)若$\frac{1+\sin^2 B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$，[理科]求 $\tan C$；[文科]求 $\tan B$.

*9.[2005·全国卷三理三(19)]△ABC 内角 A，B、C 的对边分别为 a，b，c，已知 a，b，c 成等比数列，且 $\cos B=\frac{3}{4}$.(1)求 $\cot A+\cot C$ 的值；(2)设$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}$，求 $a+c$ 的值.

10.[2004·上海春文理三(17)]在直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(2\cos x+1,2\cos 2x+2)$和点 $Q(\cos x,-1)$，其中 $x\in[0,\pi]$，若向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$垂直，求 x 的值.

11.[2004·湖南理二(13)、文一(8)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，向量 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$，则$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最大值是________.

[文科]$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最大值、最小值分别是　　(　　)

A.$4\sqrt{2}$,0　　B.4,$2\sqrt{2}$　　C.16,0　　D.4,0

12.[2004·浙江文一(4)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\tan\alpha$ 等于　　(　　)

A.$\frac{3}{4}$　　B.$-\frac{3}{4}$　　C.$\frac{4}{3}$　　D.$-\frac{4}{3}$

13.[2004·福建文、理三(17)]设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，其中向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos x,1)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)若 $f(x)=1-\sqrt{3}$，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，求 x；

(2)若函数 $y=2\sin 2x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{c}=(m,n)$($|m|<\frac{\pi}{2}$)平移后得到函数 $y=f(x)$的图象，求实数 m，n 的值.

14.[2002·北京文理一(2)]在平面直角坐标系中，已知两点 $A(\cos 80°,\sin 80°)$，$B(\cos 20°,\sin 20°)$，则$|AB|$的值是　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

三、答案与提示

1.(1)2 (2)$[-3,\frac{3}{2}]$ 提示:(2)$f(x)=1-2\sin^2x+2\sin x=-2(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$.当 $\sin x=\frac{1}{2}$时,$f(x)_{max}=\frac{3}{2}$;当 $\sin x=-1$时,$f(x)_{min}=-3$

2.[0,1] 提示:由已知$|\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{b}|=\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$

3.(1)$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ (2)$f(\theta)_{max}=3$,$f(\theta)_{min}=2$ 提示:(1)$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\theta=3$,由已知$0\leqslant bc\cos\theta\leqslant b$,所以$0\leqslant\cot\theta\leqslant1$ (2)$f(\theta)=[1-\cos(\frac{\pi}{2}+2\theta)]-\sqrt{3}\cos2\theta=\sin2\theta-\sqrt{3}\cos2\theta+1=2\sin(2\theta-\frac{\pi}{3})+1$,$2\theta-\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$

4.(1)1 (2)$f(x)_{min}=1-\sqrt{2}$,x 值的集合为$\{x|x=k\pi-\frac{3}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 提示:(1)$f(x)=m+m\sin2x+\cos2x$,$f(x)$过点$(\frac{\pi}{4},2)$,所以$2=m(1+\sin\frac{\pi}{2})+\cos\frac{\pi}{2}$ (2)$f(x)=1+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

5.(1)$\frac{25}{3}$ (2)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 提示:$|AB|=5$,$\sin B=\frac{4}{5}$,$|AC|=2\sqrt{5}$,由正弦定理或余弦定理求

6.(1)$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\pi$ (2)$\{x|k\pi-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\}$ 提示:(1)$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+\frac{1}{2}\sin2x+\frac{1}{2}(1+\cos2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}$ (2)原不等式即$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant0$,$2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$

7.$\sqrt{2}$ 提示:$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

8.(1)$\frac{\pi}{3}$ (2)$\frac{8+5\sqrt{3}}{11}$[文科:2] 提示:(1)由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$ 得 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,$-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$ (2)由已知得 $\sin^2B-\sin B\cos B-2\cos^2B=0$,$\tan^2B-\tan B-2=0$ 解得 $\tan B=2$ 或 $\tan B=-1$.而 $\tan B=-1$ 时 $\cos^2B-\sin^2B=0$,舍去,故 $\tan C=-\tan(A+B)$

9.(1)$\frac{4}{7}\sqrt{7}$ (2)3 提示:(1)$\cot A+\cot C=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}$,

由 $b^2=ac$ 得 $\sin^2 B=\sin A\sin C$　(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ac\cos B=\frac{3}{2}$, $ac=2$, 则 $b^2=2$, 而 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, 所以 $a^2+c^2=5$　$(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=9$

10. $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{3}$　提示:由 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ 得 $2\cos^2 x-\cos x=0$

11. 4　[文科:D]

12. A

13. (1) $-\frac{\pi}{4}$　(2) $m=-\frac{\pi}{12}$, $n=1$　提示:(1) $f(x)=1+2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$, $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$　(2)平移后函数为 $y=2\sin 2(x-m)+n$, 即 $y=f(x)=2\sin 2(x+\frac{\pi}{12})+1$

14. D　提示:也可由 $\angle AOB=80^\circ-20^\circ=60^\circ$, $|OA|=|OB|=1$ 得 $|AB|=1$

第五章　平面向量与解析几何的交汇

以向量为载体的解析几何试题是近几年高考中出现的一种新题型，体现了高考命题改革的发展方向和创新的必然趋势，因此已成为高考的新亮点．

平面向量与解析几何的交汇通常涉及向量运算的几何意义，向量的坐标运算、向量共线与垂直的充要条件、向量的模长与夹角、平面向量分解定理、向量的数量积、定比分点与平移等向量知识以及相应的解析几何知识（要特别注意曲线方程概念的运用）．

一、解法指导

解析几何题图中条件的陈述有向量形式出现时，其解题方法一般有以下两种：

1．将向量用坐标表示，利用向量运算的几何意义或通过向量运算将所给向量关系转化为平面图形的位置关系（如$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$转化为$OA\perp OB$，$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$转成$A,B,C$三点共线；由$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}$知$MF_1NF_2$是平行四边形；由$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$知$AB\parallel CD$）或数量关系，再利用解析几何的有关知识和方法来解题．

2．根据题中已给的向量形式，继续使用向量的性质及运算解题，如例1、例18．

究竟使用哪种方法应视具体问题而定，而大多使用第1种方法．

（一）向量与直线方程的交汇

1．一条不平行于两坐标轴的直线l过点$P(x_0,y_0)$，若其方向向量为$\boldsymbol{m}=(a,b)$，则直线的方程可表示为$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$，这一方程称为直线的点向式方程，直线斜率$k=\frac{b}{a}$．

2．一条直线l过点$P_0(x_0,y_0)$，其法向量$\boldsymbol{n}=(A,B)$．设$P(x,y)$是直线l上任意一点，由$\overrightarrow{P_0P}\cdot\boldsymbol{n}=0$得直线的方程为：$Ax+By-(Ax_0+By_0)=0$，这一方程称为直线的点法式方程．

例1　［2003·天津文—(8)、江苏文、理—(5)］O是平面上一定点，A,B,C

是平面上不共线的三个点，动点 P 满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则 P 的轨迹一定通过$\triangle ABC$ 的　　（　　）

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

解　设$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\overrightarrow{AB'}$为$\overrightarrow{AB}$的单位向量，$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AC'}$为$\overrightarrow{AC}$的单位向量，$\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$的方向为$\overrightarrow{AB'}$，$\overrightarrow{AC'}$所构成的平行四边形对角线的方向，因此时的平行四边形为菱形，所以即$\angle BAC$ 的平分线$\overrightarrow{AD}$的方向（图 5.1）。设$\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)=\overrightarrow{AD'}$，因为 $\lambda\geqslant 0$，所以$\overrightarrow{AD'}$的方向与$\overrightarrow{AD}$方向相同。因为$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)=\overrightarrow{AD'}$，所以点 P 在 AD 上移动，所以 P 的轨迹一定通过$\triangle ABC$ 的内心，应选 B.

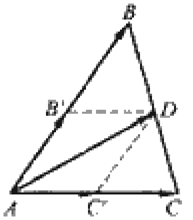


图 5.1

例 2　过点(2,1)且垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$的直线方程为________.

解一　设 $M(x,y)$为所求直线上任一点，记 $N(2,1)$，则$\overrightarrow{NM}=(x-2,y-1)$。因为$\overrightarrow{NM}\perp\boldsymbol{a}$，所以$(-1)(x-2)+2(y-1)=0$，即 $x-2y=0$ 为所求直线方程.

解二　过点(2,1)且与向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$垂直的直线方程为：$\frac{y-1}{-1}=-\frac{x-2}{2}$，即 $x-2y=0$.

(二)向量与圆的方程的交汇

例 3　[2007·全国卷Ⅱ理三(20)、文三(21)]在直角坐标系 xOy 中，以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切.

(1)求圆 O 的方程；

(2)圆 O 与 x 轴相交于 A，B 两点，圆内的动点 P 使$|PA|$，$|PO|$，$|PB|$成等比数列，求$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围.

解　(1)圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$，解法略.

(2)不妨设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$x_1<x_2$，由 $x^2+0^2=4$ 得 $A(-2,0)$，$B(2,0)$。设 $P(x,y)$，由$|PA|$，$|PO|$，$|PB|$成等比数列得$|PO|^2=|PA||PB|$，即

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x^2+y^2$$

则 $x^2-y^2=2$。而$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-2-x,-y)\cdot(2-x,-y)=x^2-4+y^2=y^2+2-4+y^2=2(y^2-1)$，因为点 P 在圆 O 内，所以$\begin{cases}x^2+y^2<4\\x^2-y^2=2\end{cases}$，由此得 $y^2<1$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围为$[-2,0)$.

例 4 [2005·辽宁文理一(9)]若直线 $2x-y+c=0$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$ 平移后与圆 $x^2+y^2=5$ 相切，则 C 的值为 ( )

A. 8 或 -2　　B. 6 或 -4　　C. 4 或 -6　　D. 2 或 -8

解 直线 $2x-y+c=0$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$ 平移后为 $2(x-1)-(y+1)+c=0$，即 $2x-y+c-3=0$，它与圆 $x^2+y^2=5$ 相切，所以 $\dfrac{|c-3|}{\sqrt{2^2+1}}=\sqrt{5}$，所以 $c=8$ 或 $c=-2$，应选 A.

(三)向量与圆锥曲线交汇

1. 若直线与圆锥曲线交于 A,B 两点，且有 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$(这说明 P,A,B 三点共线)，此时一般是通过向量的坐标运算或利用定比分点坐标公式求出坐标之间的关系，如例 7、例 8.

2. 若共线向量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 满足 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\lambda$，则 $\boldsymbol{a}=\pm\lambda\boldsymbol{b}$，如例 5.

例 5 [2004·江苏文理三(21)]已知椭圆的中心在原点，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，一个焦点是 $F(-m,0)$(m 是大于 0 的常数).

(1)求椭圆的方程；

(2)设 Q 是椭圆上的一点，且过点 F,Q 的直线 l 与 y 轴交于点 M，若 $|\overrightarrow{MQ}|=2|\overrightarrow{QF}|$，求直线 l 的斜率.

解 (1)椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4m^2}+\dfrac{y^2}{3m^2}=1$，解法略.

(2)设直线 l 的斜率为 k，则 l 的方程为 $y=k(x+m)$. 令 $x=0$，得 $y_M=km$，即 $M(0,km)$.

由 $|\overrightarrow{MQ}|=2|\overrightarrow{QF}|$，知 $\overrightarrow{MQ}=\pm2\overrightarrow{QF}$.

设 $Q(x_0,y_0)$，当 $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{QF}$，即 $(x_0,y_0-km)=2(-m-x_0,-y_0)$ 时，由 $\begin{cases}x_0=-2m-2x_0\\ y_0-km=-2y_0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_0=-\dfrac{2}{3}m\\ y_0=\dfrac{1}{3}km\end{cases}$，即 $Q\left(-\dfrac{2}{3}m,\dfrac{1}{3}km\right)$. 因为 Q 在椭圆上，所以 $\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}m\right)^2}{4m^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}km\right)^2}{3m^2}=1$，解得 $k=\pm2\sqrt{6}$. 当 $\overrightarrow{MQ}=-2\overrightarrow{QF}$，即 $(x_0,y_0-km)=-2(-m-x_0,-y_0)$ 时，解得 $Q(2m,km)$，代入椭圆方程求得 $k=0$，因此直线 l 的斜率是 0 或 $\pm2\sqrt{6}$.

例 6 [2005·江苏文理一(11)]点 $P(-3,1)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

的左准线上，过点 P 且方向为 $\boldsymbol{a}=(2,-5)$ 的光线，经直线 $y=-2$ 反射后通过椭圆的左焦点，则这个椭圆的离心率是 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

解 设椭圆的左焦点为 $F_1(-c,0)$，它关于直线 $y=-2$ 的对称点为 $F_1'(-c,-4)$，则 $\overrightarrow{PF_1}=(-c+3,-5)$ 与 $\boldsymbol{a}=(2,-5)$ 共线，所以 $\frac{-c+3}{2}=\frac{-5}{-5}=1$，则 $c=1$. 因为 $P(-3,1)$ 在左准线上，所以 $-\frac{a^2}{c}=-3$，$a=\sqrt{3}$，则 $e=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，应选 A.

例 7 [2000·全国、天津、广文理三(22)]如图 5.2，已知梯形 $ABCD$ 中，$|AB|=2|CD|$，点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ[文科：$\frac{8}{11}$；天津理科：$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{EC}$，文科：点 E 满足 $\overrightarrow{AE}=\frac{8}{11}\overrightarrow{EC}$]，双曲线过 C，D，E 三点，且以 A，B 为焦点，当 $\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$ 时，求双曲线离心率 e 的取值范围[文科：求双曲线的离心率].

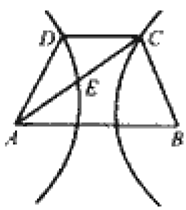


图 5.2

解 以 AB 的垂直平分线为 y 轴，直线 AB 为 x 轴建立直角坐标系，则 $CD\perp y$ 轴. 因为双曲线过点 C，D，且以 A，B 为焦点，所以 C，D 关于 y 轴对称. 设 $A(-c,0)$，$C\left(\frac{c}{2},h\right)$，$E(x_0,y_0)$. 因为 $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EC}}=\lambda$，所以 $x_0=\frac{-c+\lambda\frac{c}{2}}{1+\lambda}=\frac{(\lambda-2)c}{2(\lambda+1)}$，$y_0=\frac{\lambda h}{1+\lambda}$. 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则 $e=\frac{c}{a}$，因为 C，E 在双曲线上，所以

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{c^2}{4}}{a^2}-\dfrac{h^2}{b^2}=1\\ \dfrac{(\lambda-2)^2\cdot c^2}{4(\lambda+1)^2a^2}-\dfrac{\lambda^2h^2}{(\lambda+1)^2b^2}=1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{e^2}{4}-\dfrac{h^2}{b^2}=1 & ①\\ \dfrac{e^2}{4}\left(\dfrac{\lambda-2}{\lambda+1}\right)^2-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2\cdot\dfrac{h^2}{b^2}=1 & ②\end{cases}$$

由①得
$$\frac{h^2}{b^2}=\frac{e^2}{4}-1 \qquad ③$$

将③代入②并整理得$\frac{e^2}{4}(4-4\lambda)=2\lambda+1$，所以$\lambda=\frac{e^2-1}{e^2+2}=1-\frac{3}{e^2+2}$. 因为$\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$，所以$\frac{1}{3}\geqslant\frac{3}{e^2+2}\geqslant\frac{1}{4}$，解得$\sqrt{7}\leqslant e\leqslant\sqrt{10}$[文科：$e=3$].

例 8 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为 2，坐标原点到直线 AB 的距离为$\frac{3}{2}$，其中 $A(a,0)$，$B(0,-b)$.

(1)求双曲线方程；

(2)若 B_1 是双曲线虚轴在 y 轴正半轴上的端点，点 M，N 在双曲线上，且$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BN}$. 求$\overrightarrow{B_1M}\perp\overrightarrow{B_1N}$时直线 MN 的方程.

解 (1)双曲线方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$，解法略.

(2)因为$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BN}$，所以 B，M，N 三点共线，又 $B(0,-3)$，所以可设直线 MN 的方程为 $y=kx-3$. 由$\begin{cases}y=kx-3\\ \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$，消去 y 得
$$(3-k^2)x^2+6k^2x-18=0 \qquad ①$$
设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{6k}{3-k^2}$，$x_1x_2=\frac{18}{3-k^2}$. 由 $B_1(0,3)$得$\overrightarrow{B_1M}=(x_1,y_1-3)=(x_1,kx_1-6)$，$\overrightarrow{B_1N}=(x_2,kx_2-6)$，由$\overrightarrow{B_1M}\perp\overrightarrow{B_1N}$得
$$x_1x_2+(kx_1-6)(kx_2-6)=0$$
所以
$$(1+k^2)\cdot\frac{-18}{3-k^2}-6k\cdot\frac{-6k}{3-k^2}+36=0$$
所以 $k^2=5$，则 $k=\pm\sqrt{5}$. 经检验，当 $k^2=5$ 时，方程①有解，因此所求直线 MN 的方程为 $y=\sqrt{5}x-3$ 或 $y=-\sqrt{5}x-3$.

例 9 [2004·天津文理三(22)]如图 5.3，椭圆的中心是原点 O，它的短轴长为 $2\sqrt{2}$，相应于焦点 $F(c,0)(c>0)$的准线 l 与 x 轴相交于点 A，$|OF|=2|FA|$，过点 A 的直线与椭圆相交于 P，Q 两点.

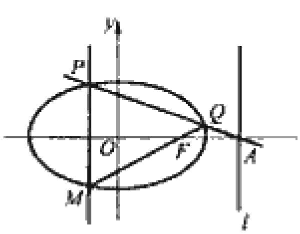


图 5.3

(1)求椭圆的方程及离心率；

(2)若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求直线 PQ 的方程；

(3)设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda>1)$，过点 P 且平行于准线 l 的直线与椭圆相交于另

一点 M. 证明：$\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$.

解　(1)椭圆方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，解法略.

(2)PQ 的方程为 $x-\sqrt{5}y-3=0$ 或 $x+\sqrt{5}y-3=0$，解法略.

(3)$A(3,0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{AP}=(x_1-3,y_1)$，$\overrightarrow{AQ}=(x_2-3,y_2)$，由已知得

$$\begin{cases}x_1-3=\lambda(x_2-3) & ①\\ y_1=\lambda y_2 & ②\\ \frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{2}=1 & ③\\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{2}=1 & ④\end{cases}$$

由①得 $x_1=\lambda x_2+3(1-\lambda)$，代入③得

$$\frac{\lambda^2x_2^2+9(1-\lambda)^2+6(1-\lambda)\lambda x_2}{6}+\lambda^2\left(1-\frac{x_2^2}{6}\right)=1$$

$$\frac{9(1-\lambda)^2+6(1-\lambda)\lambda x_2}{6}+\lambda^2=1$$

$$x_2=\frac{5\lambda^2-6\lambda+1}{2(1-\lambda)\lambda}=\frac{5\lambda-1}{2\lambda}$$

因为 $F(2,0)$，$M(x_1,-y_1)$，所以

$$\overrightarrow{FM}=(x_1-2,-y_1)=(\lambda(x_2-3)+1,-y_1)=\left(\frac{1-\lambda}{2},-y_1\right)=-\lambda\left(\frac{\lambda-1}{2\lambda},y_2\right)$$

而
$$\overrightarrow{FQ}=(x_2-2,y_2)=\left(\frac{\lambda-1}{2\lambda},y_2\right)$$

所以
$$\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$$

例 10　[2006·山东理三(21)]如图 5.4，双曲线 C 与椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点，直线 $y=\sqrt{3}x$ 为 C 的一条渐近线.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)过点 $P(0,4)$ 的直线 l 交双曲线 C 于 A，B 两点，交 x 轴于点 Q(点 Q 与 C 的顶点不重合)，当 $\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}=\lambda_2\overrightarrow{QB}$，且 $\lambda_1+\lambda_2=-\frac{8}{3}$ 时，求点 Q 坐标.

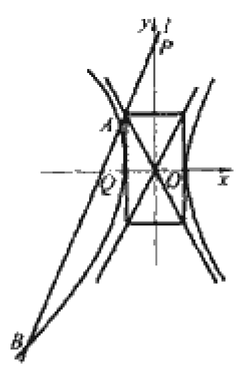


图 5.4

解　(1)$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，解法略.

(2)解一　由题意知直线 l 的斜率 k 存在且不等于 0,设 l 方程为:$y=kx+4$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则 $Q(-\frac{4}{k},0)$. 因为 $\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}$,所以 $\left(-\frac{4}{k},-4\right)=\lambda_1\left(x_1+\frac{4}{k},y_1\right)$,所以

$$\begin{cases}-\frac{4}{k}=\lambda_1(x_1+\frac{4}{k})\\ -4=\lambda_1 y_1\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}x_1=-\frac{4}{k\lambda_1}-\frac{4}{k}\\ y_1=-\frac{4}{\lambda_1}\end{cases}$$

因为 $A(x_1,y_1)$在双曲线 C 上,所以

$$\frac{16}{k^2}\left(\frac{|1+\lambda|}{\lambda_1}\right)^2-\frac{16}{3\lambda_1^2}-1=0$$

即
$$16+32\lambda_1+16\lambda_1^2-\frac{16}{3}k^2-k^2\lambda_1^2=0$$

$$(16-k^2)\lambda_1^2+32\lambda_1+16-\frac{16}{3}k^2=0$$

同理有
$$(16-k^2)\lambda_2^2+32\lambda_2+16-\frac{16}{3}k^2=0$$

若 $16-k^2=0$,则直线 l 过顶点,不合题意,所以 $16-k^2\neq0$,则 λ_1,λ_2 是二次方程$(16-k^2)x^2+32x+16-\frac{16}{3}k^2=0$ 的两根,则 $\lambda_1+\lambda_2=\frac{32}{k^2-16}=-\frac{8}{3}$,所以 $k^2=4$,此时 $\Delta>0$,则 $k=\pm2$,因此所求点 Q 坐标为$(\pm2,0)$.

解二　设 l 方程为:$y=kx+4$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则 $Q(-\frac{4}{k},0)$. 因为 $\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}$,所以 Q 分$\overrightarrow{PA}$比为λ_1,由定比分点坐标公式得$\begin{cases}-\frac{4}{k}=\frac{\lambda_1x_1}{1+\lambda_1}\\ 0=\frac{4+\lambda_1y_1}{1+\lambda}\end{cases}$,即

$$\begin{cases}x_1=-\frac{4}{k\lambda_1}(1+\lambda_1)\\ y_1=-\frac{4}{\lambda_1}\end{cases}$$
,以下同解一.

解三　由题意知直线 l 的斜率 k 存在且不等于 0,设 l 的方程为 $y=kx+4$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则 $Q\left(-\frac{4}{k},0\right)$. 因为$\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}=\lambda_2\overrightarrow{QB}$,所以

$$\left(-\frac{4}{k},-4\right)=\lambda_1\left(x_1+\frac{4}{k},y_1\right)=\lambda_2\left(x_2+\frac{4}{k},y_2\right)$$

所以 $-4=\lambda_1 y_1=\lambda_2 y_2$，即 $\lambda_1=-\frac{4}{y_1}$，$\lambda_2=-\frac{4}{y_2}$，又 $\lambda_1+\lambda_2=-\frac{8}{3}$，所以 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{2}{3}$，即

$$3(y_1+y_2)=2y_1y_2 \quad ①$$

将 $y=kx+4$ 代入 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，并消去 x 得

$$(3-k^2)y^2-24y+48-3k^2=0$$

因为 $3-k^2\neq 0$（否则 l 与渐近线平行），所以

$$y_1+y_2=\frac{24}{3-k^2},y_1y_2=\frac{48-3k^2}{3-k^2}$$

代入①得 $3\times\frac{24}{3-k^2}=3\times\frac{48-3k^2}{3-k^2}$，$k^2=4$，解得 $k=\pm 2$，所以 $Q(\pm 2,0)$.

3. 若直线 l（设其方程为 $y=kx+m$）与圆锥曲线 C 相交于 A，B 两点，要求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$（$O$ 为坐标原点）的值时，先要分 AB 是否与 x 轴垂直来讨论（也可设直线方程为 $x=my+m$，这样可不必讨论 AB 与 x 轴是否垂直，如例 14），然后将方程 l 代入 C 的方程消去 y（也可消去 x）得到一个关于 x 的一元方程，若其二次项系数不为零，可设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 x_1，x_2 为这一元二次方程的两个根，利用韦达定理求出 x_1+x_2 和 x_1x_2，则 $y_1\cdot y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$（也可将 $y=kx+m$ 代入 C 的方程消去 x，再利用韦达定理求出 y_1y_2），于是可求得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$ 的值，如例 9、例 12.

例 11 ［2006·北京理三(19)］已知点 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，动点 P 满足条件 $|PM|-|PN|=2\sqrt{2}$，记动点 P 的轨迹为 W.

(1)求 W 的方程；

(2)若 A，B 是 W 上的不同两点 O 是坐标原点，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值.

解 (1) W 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，$x\geq\sqrt{2}$，解法略.

(2)设 A，B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则 $\frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}=1$，当 $AB\perp x$ 轴时，$x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，从而 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1^2-y_1^2=2$. 当 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，与 W 的方程联立，消去 y 得

$$(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-2=0$$

当 $1-k^2\neq 0$，即 $k\neq\pm 1$ 时，$x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}$，$x_1x_2=\frac{m^2+2}{k^2-1}$，从而

$$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$$

所以

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=$$
$$\frac{(1+k^2)(m^2+2)}{k^2-1}+\frac{2k^2m^2}{1-k^2}+m^2=\frac{2k^2+2}{k^2-1}=2+\frac{4}{k^2-1}$$

又因为 $x_1\geqslant\sqrt{2}$，$x_2\geqslant\sqrt{2}$，所以 $x_1x_2>0$，则 $k^2-1>0$，从而 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$. 当 $1-k^2=0$，即 $k=\pm1$ 时，直线与双曲线的渐近线平行，与双曲线只有一个交点，这与已知矛盾.

综上，当 $AB\perp x$ 轴时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 取得最小值 2.

例 12 ［2008·四川理三(21)］如图 5.5，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，右准线为 l，M，N 分别是 l 上的两个动点，$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$.

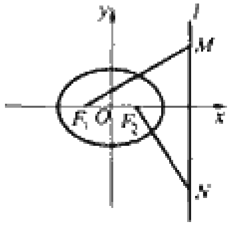


图 5.5

(1)若 $|\overrightarrow{F_1M}|=|\overrightarrow{F_2N}|=2\sqrt{5}$，求 a，b 的值；

(2)证明：当 $|\overrightarrow{MN}|$ 取最小值时，$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$ 与 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 共线.

（注：2008 四川文三(22)与此题类似）

解 由 $a^2-b^2=c^2$ 与 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $a^2=2b^2$，$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$l$ 的方程为 $x=\sqrt{2}a$.

设 $M(\sqrt{2}a,y_1)$，$N(\sqrt{2}a,y_2)$，则 $\overrightarrow{F_1M}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a,y_1\right)$，$\overrightarrow{F_2N}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,y_2\right)$，由 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$，得

$$y_1y_2=-\frac{3}{2}a^2<0 \quad ①$$

(1)由 $|\overrightarrow{F_1M}|=|\overrightarrow{F_2N}|=2\sqrt{5}$，得

$$\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2+y_1^2}=2\sqrt{5} & ②\\ \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+y_2^2}=2\sqrt{5} & ③\end{cases}$$

由式①,②,③消去 y_1,y_2,并求得 $a^2=4$,所以 $a=2,b=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

(2)$|\overrightarrow{MN}|^2=(y_1-y_2)^2=y_1^2+y_2^2-2y_1y_2\geqslant-2y_1y_2-2y_1y_2=-4y_1y_2=6a^2$,当且仅当 $y_1=-y_2=\frac{\sqrt{6}}{2}a$ 或 $y_2=-y_1=\frac{\sqrt{6}}{2}a$ 时,$|\overrightarrow{MN}|$取最小值$\sqrt{6}a$,此时,$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a,y_1\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,y_2\right)=(2\sqrt{2}a,y_1+y_2)=(2\sqrt{2}a,0)=2\overrightarrow{F_1F_2}$,所以$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$与$\overrightarrow{F_1F_2}$共线.

例 13　[2008·海南理三(20)]在直角坐标系 xOy 中,椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,F_2 也是抛物线 $C_2:y^2=4x$ 的焦点,点 M 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点,且 $|MF_2|=\frac{5}{3}$.

(1)求 C_1 的方程;

(2)平面上的点 N 满足$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}$,直线 $l/\!/MN$,且与 C_1 交于 A,B 两点.若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,求直线 l 的方程.

解　(1)椭圆 C_1 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,$M(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})$,解法略.

(2)如图 5.6,由$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}$知四边形 MF_1NF_2 是平行四边形.由平行四边形对角线互相平分知$\overline{MN}$过 F_1F_2 的中点 O.因为 $l/\!/MN$,所以 $l/\!/OM$,则 $k_l=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\frac{2}{3}}=\sqrt{6}$.设 l 的方程为 $y=\sqrt{6}(x-m)$,由

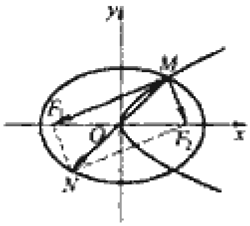


图 5.6

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=\sqrt{6}(x-m)\end{cases}$,消去 y 并整理得$9x^2-16mx+8m^2-4=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{16m}{9}$,$x_1x_2=\frac{8m^2-4}{9}$.因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$,即

$$x_1x_2+6(x_1-m)(x_2-m)=7x_1x_2-6m(x_1+x_2)+6m^2=$$
$$7\times\frac{8m^2-4}{9}-6m\times\frac{16m}{9}+6m^2=$$
$$\frac{1}{9}(14m^2-28)=0$$

所以 $m=\pm\sqrt{2}$，此时 $\Delta=(16m)^2-4\times9(8m^2-4)>0$，因此所求直线 l 的方程为 $y=\sqrt{6}x-2\sqrt{3}$ 或 $y=\sqrt{6}x+2\sqrt{3}$.

例 14 ［2005·全国卷一理三(21)、文三(22)］已知椭圆的中心为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A，B 两点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\boldsymbol{a}=(3,-1)$ 共线.

(1)求椭圆的离心率；

(2)设 M 为椭圆上任意一点，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$. 证明：$\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

解 (1)设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F(c,0)$. 直线 AB 的方程为 $y=x-c$，代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，并整理得

$$(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2c^2-a^2b^2=0$$

令 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$x_1+x_2=\frac{2a^2c}{a^2+b^2},x_1x_2=\frac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$$

由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ 与 $\boldsymbol{a}=(3,-1)$ 共线得

$$3(y_1+y_2)+(x_1+x_2)=0$$

因为 $y_1=x_1-c$，$y_2=x_2-c$，所以 $3(x_1+x_2-2c)+x_1+x_2=0$，$x_1+x_2=\dfrac{3c}{2}$，即 $\dfrac{2a^2c}{a^2+b^2}=\dfrac{3c}{2}$，所以 $a^2=3b^2$，则 $c=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，所以 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)由(1)知 $a^2=3b^2$，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，即 $x^2+3y^2=3b^2$. 设 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$，由 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ 得

$$\begin{cases}x=\lambda x_1+\mu x_2\\y=\lambda y_1+\mu y_2\end{cases}$$

因为 $M(x,y)$ 在椭圆上，所以

$$(\lambda x_1+\mu x_2)^2+3(\lambda y_1+\mu y_2)^2=3b^2$$

即 $$\lambda^2(x_1^2+3y_1^2)+\mu^2(x_2^2+3y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+3y_1y_2)=3b^2 \quad ①$$

因为 $$c^2=\frac{2}{3}a^2,b^2=\frac{1}{3}a^2$$

所以 $$x_1x_2=\frac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{1}{4}a^2$$

$$y_1y_2=(x_1-c)(x_2-c)=x_1x_2-(x_1+x_2)c+c^2=$$

$$\frac{1}{4}a^2-\frac{2a^2\cdot c^2}{a^2+b^2}+\frac{2}{3}a^2=-\frac{1}{12}a^2$$

又因为 $x_1^2+3y_1^2=3b^2$，$x_2^2+3y_2^2=3b^2$，代入式①得 $\lambda^2\cdot 3b^2+\mu^2\cdot 3b^2+2\lambda\mu\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2\right)=3b^2$，所以 $\lambda^2+\mu^2=1$．故 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值．

例 15　［2007·福建理三(20)、文三(22)］如图 5.7，已知点 $F(1,0)$，直线 $l:x=-1$，P 为平面上的动点，过点 P 作直线 l 的垂线，垂足为 Q，且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$．

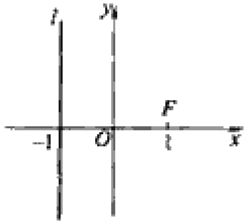


图 5.7

(1)求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2)过点 F 的直线交轨迹 C 于 A，B 两点，交直线 l 于点 M．

［理科、文科①］：已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值；

［文科②］：求 $|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|$ 的最小值．

解　(1)设点 $P(x,y)$，则 $Q(-1,y)$．由 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$ 得 $(x+1,0)\cdot(2,-y)=(x-1,y)\cdot(-2,y)$，化简得 C 的方程为 $y^2=4x$．

(2)设直线 AB 的方程为 $x=my+1(m\neq 0)$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，又 $M\left(-1,-\frac{2}{m}\right)$，联立方程组 $\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1\end{cases}$，消去 x 得：$y^2-4my-4=0$，$\Delta=(-4m)^2+16>0$，故 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$．由 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$ 得 $y_1+\frac{2}{m}=-\lambda_1y_1$，$y_2+\frac{2}{m}=-\lambda_2y_2$，整理得 $\lambda_1=-1-\frac{2}{my_1}$，$\lambda_2=-1-\frac{2}{my_1}$，所以 $\lambda_1+\lambda_2=-2-\frac{2}{m}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=-2-\frac{2}{m}\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-2-\frac{2}{m}\cdot\frac{4m}{-4}=0$．

例 16　［2007·辽宁理三(20)、文三(21)］已知正△OAB 的三个顶点都在抛物线 $y^2=2x$ 上，其中 O 为坐标原点，设 $\odot C$ 是△OAB 的外接圆(点 C 为圆心)．

(1)求圆 C 的方程；

(2)设圆 M 的方程为 $(x-4-7\cos\theta)^2+(y-7\sin\theta)^2=1$，过圆 M 上任意一点 P 分别作圆 C 的两条切线 PE，PF，切点为 E，F，求 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最大值和最小值．

解　(1)圆 C 的方程为 $(x-4)^2+y^2=16$，解法略．

(2)设 $\angle ECF=2\alpha$，则

$$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=|\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{CF}|\cos 2\alpha=16\cos 2\alpha=32\cos^2\alpha-16$$

在 Rt△PCE 中，$\cos\alpha=\frac{r}{|PC|}=\frac{4}{|PC|}$，由圆的几何性质得

$$|PC|\leqslant|MC|+1=7+1=8,|PC|\geqslant|MC|-1=7-1=6$$

所以$\frac{1}{2}\leqslant\cos\alpha\leqslant\frac{2}{3}$，由此得$-8\leqslant\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}\leqslant-\frac{16}{9}$，因此$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$的最大值为$-\frac{16}{9}$，最小值为$-8$.

例 17　[2006·天津理三(22)]如图 5.8，以椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的中心 O 为圆心，分别以 a 和 b 为半径作大圆和小圆. 过椭圆右焦点 $F(c,0)(c>b)$和垂直于 x 轴的直线交大圆于第一象内的点 A，联结 OA 交小圆于点 B，设直线 BF 是小圆的切线.

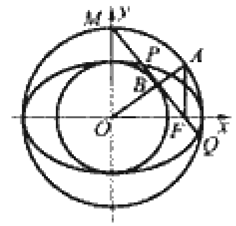


图 5.8

(1)证明：

$$c^2=ab \qquad ①$$

并求直线 BF 与 y 轴交点 M 的坐标；

(2)设直线 BF 交椭圆于 P，Q 两点，证明：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}b^2$.

证明　(1)证明略，点 M 的坐标为$(0,a)$.

(2)由(1)得直线 BF 的方程为$y=kx+a$，且

$$k^2=\frac{c^2}{b^2}=\frac{ab}{b^2}=\frac{a}{b} \qquad ②$$

由已知，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则它们的坐标满足方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+a\end{cases} \qquad ③$$

由方程组③消去 y 并整理得

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^3kx+a^4-a^2b^2=0 \qquad ④$$

由式①，②和④得

$$x_1x_2=\frac{a^4-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}=\frac{a^2(a^2-b^2)}{b^2+a^2\cdot\frac{a}{b}}=\frac{a^3b^2}{a^3+b^3}$$

由方程组③消去 x 并整理得

$$(b^2+a^2k^2)y^2-2ab^2y+a^2b^2-a^2b^2k^2=0 \qquad ⑤$$

由式②和⑤得

$$y_1y_2=\frac{a^2b^2(1-k^2)}{b^2+a^2k^2}=\frac{a^2b^2(1-\frac{a}{b})}{b^2+a^2\cdot\frac{a}{b}}=\frac{a^2b^2(b-a)}{a^3+b^3}$$

综上得到

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{a^3b^2}{a^3+b^3}+\frac{a^2b^2(b-a)}{a^3+b^3}=\frac{a^2b^3}{a^3+b^3}$$

由 $a^2-ab+b^2=a^2-c^2+b^2=2b^2$，得

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{a^2b^3}{a^3+b^3}=\frac{a^2b^3}{(a+b)\cdot 2b^2}=\frac{a^2b}{2(a+b)}=\frac{ac^2}{2(a+b)}=\frac{a(a^2-b^2)}{2(a+b)}=$$
$$\frac{1}{2}(a^2-ab)=\frac{1}{2}(a^2-c^2)=\frac{1}{2}b^2$$

4. 遇到求参变量取值范围的问题时，有以下两种解法：

(1)函数值域求解法　把所讨论的参变量看作一个函数，选一个适当的参数作为自变量(要注意其取值范围)来表示这个函数，通过求函数的值域或利用其单调性求出参变量的取值范围，如例 15.

(2)不等式(组)求解法　利用题设条件结合图形列出所讨的参变量适合的不等式(组)，通过解不等式(组)得出参变量的取值范围.

例 18　[2004·全国卷二理三(21)]给定抛物线 $C:y^2=4x$，F 是 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A,B 两点.

(1)设 l 的斜率为 1，求$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$夹角的大小；

(2)设$\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$，若 $\lambda\in[4,9]$，求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

解　(1) $F(1,0)$，l 的方程为 $y=x-1$，代入 $y^2=4x$ 并整理得 $x^2-6x+1=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$x_1+x_2=6,x_1x_2=1,y_1y_2=(x_1-1)(x_2-1)=1-6+1=-4$$

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1-4=-3$. 而

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{[x_1^2+(x_1-1)^2][x_2^2+(x_2-1)^2]}=$$
$$\sqrt{3x_1^2x_2^2-2x_1x_2(x_1+x_2)+(x_1^2+x_2^2)+y_1^2y_2^2}=$$
$$\sqrt{3-2\times6+36+16}=\sqrt{41}$$

所以 $\cos<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}>=\frac{-3}{\sqrt{41}}=\frac{-3\sqrt{41}}{41}$，则$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为 $\pi-\arccos\frac{3\sqrt{41}}{41}$.

(2)**解一**　$F(1,0)$，设直线 l 的斜率为 k，则 l 的方程为 $y=k(x-1)=kx-k$，l 在 y 轴上的截距为 $-k$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$得 $(x_2-1,y_2)=\lambda(1-x_1,-y_1)$，即

$$\begin{cases} x_2 - 1 = \lambda(1 - x_1) \\ y_2 = -\lambda y_1 \end{cases} \quad ①$$

将 $y = kx - k$ 代入 $y^2 = 4x$,消去 x 得 $ky^2 - 4y - 4k = 0$. 则

$$y_1 + y_2 = \frac{4}{k} \quad ②$$

$$y_1 y_2 = -4 \quad ③$$

由①,②,③消去 y_1, y_2 得 $-\lambda\left[\frac{4}{k(1-\lambda)}\right]^2 = -4$,解得

$$k^2 = \frac{4\lambda}{(1-\lambda)^2}, \quad k = \pm\frac{2\sqrt{\lambda}}{1-\lambda} = \pm\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}} = \pm\frac{2}{\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$$

当 $\lambda \in [4,9]$ 时,$\sqrt{\lambda} \in [2,3]$,函数 $\sqrt{\lambda}$ 和 $-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ 都是增函数,则 $\frac{2}{\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ 是减函数,$-\frac{2}{\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ 是增函数,所以 $-k = \frac{2}{\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right]$;$-k = \frac{2}{\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$,则 l 在 y 轴上截距的变化范围是 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$.

解二 同上得 $k = \pm\frac{2\sqrt{\lambda}}{1-\lambda}$. 设 $f(\lambda) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1-\lambda}$,$f'(\lambda) = \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}}}{(1-\lambda)^2} > 0$,所以 $f(\lambda)$ 在 $[4,9]$ 上是增函数,则 $f(\lambda) \in \left[-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right]$,$-f(\lambda) \in \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$,所以 $k \in \left[-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$,即 l 在 y 轴上截距的变化范围是 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$.

例 19 [2007·江西理三(21)]如图 5.9,设动点 P 到点 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2,$\angle APB = 2\theta$,且存在常数 $\lambda(0 < \lambda < 1)$,使得 $d_1 d_2 \sin^2\theta = \lambda$.

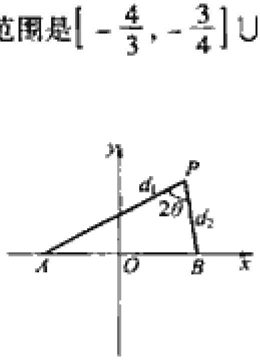


图 5.9

(1)证明:动点 P 的轨迹 C 为双曲线,并求出 C 的方程;

(2)过点 B 作直线交双曲线 C 的右支于 M,N 两

点，试确定 λ 的范围，使 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，其中点 O 为坐标原点.

解 (1) C 的方程为 $\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1$，解法略.

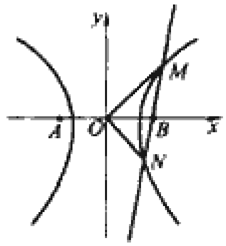


图 5.10

(2) 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$①，当 $MN\perp x$ 轴时，MN 方程为 $x=1$. 设 $M(1,y_0)$，$N(1,-y_0)$，由 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ 得 $1-y_0^2=0$，$y_0=\pm1$，所以 $M(1,1)$，$N(1,-1)$. 因为 M,N 在双曲线上，所以

$$\frac{1}{1-\lambda}-\frac{1}{\lambda}=1,\lambda^2+\lambda-1=0,\lambda=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$$

因为 $0<\lambda<1$，所以

$$\lambda=\frac{\sqrt5-1}{2} \qquad ②$$

当 MN 不垂直 x 轴时，设 MN 方程为 $y=k(x-1)$，由

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$$

得 $$[\lambda-(1-\lambda)k^2]x^2+2(1-\lambda)k^2x-(1-\lambda)(k^2-\lambda)=0$$

由题意知 $$[\lambda-(1-\lambda)k^2]\neq0$$

所以 $$x_1+x_2=\frac{-2k^2(1-\lambda)}{\lambda-(1-\lambda)k^2},x_1x_2=\frac{-(1-\lambda)(k^2+\lambda)}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$$

于是 $y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=\dfrac{k^2\lambda^2}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$.

因为 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，且 M,N 在双曲线右支上，所以 $\begin{cases}x_1x_2+y_1y_2=0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}$，即

$\begin{cases}k^2\lambda^2-(1-\lambda)(k^2+\lambda)=0\\ \lambda-(1-\lambda)k^2<0\end{cases}$，即亦 $\begin{cases}k^2=\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}\\ k^2>\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}>\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\\ \lambda^2+\lambda-1>0\end{cases}$，解

得 $\dfrac{\sqrt5-1}{2}<\lambda<\dfrac{2}{3}$，由①，②知 $\dfrac{\sqrt5-1}{2}\leqslant\lambda<\dfrac{2}{3}$.

例 20 已知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 是离心率为 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 的椭圆的两个焦点，A 为椭圆的一个短轴端点，且 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=-1$.

(1) 求椭圆方程；

(2) 过点 $P(0,2)$ 的直线交椭圆于 C,D 两点，求 $\dfrac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{PD}|}$ 的取值范围.

解 (1)椭圆方程为 $x^2+3y^2=3$,即 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$,解法略.

(2)设 $\frac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{PD}|}=\lambda$,显然 $\lambda\neq 1$,由于 $\overrightarrow{PC}$ 与 $\overrightarrow{PD}$ 同向,所以 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{PD}$,设 $C(x_0,y_0)$,$D(m,n)$,则 $(x_0,y_0-2)=\lambda(m,n-2)$,所以 $\begin{cases}x_0=\lambda m\\ y_0-2=\lambda(n-2)\end{cases}$,即 $\begin{cases}x_0=\lambda m\\ y_0=\lambda n-2\lambda+2\end{cases}$,由 C,D 在椭圆 $x^2+3y^2=3$ 上得

$$\begin{cases}(\lambda m)^2+3(\lambda n+2\lambda+2)^2=3\\ m^2+3n^2=3\end{cases}$$

消去 m 得

$$\lambda^2-\lambda^2n^2+(\lambda n-2\lambda+2)^2=1,5\lambda^2-8\lambda+3=(4\lambda^2-4\lambda)\cdot k$$

$$k=\frac{(5\lambda-3)(\lambda-1)}{4\lambda(\lambda-1)}=\frac{5\lambda-3}{4\lambda}$$

因为 $|n|\leqslant 1$,所以 $\left|\frac{5\lambda-3}{4\lambda}\right|\leqslant 1$,$(5\lambda-3)^2\leqslant(4\lambda)^2$,$3\lambda^2-10\lambda+3\leqslant 0$,解得 $\frac{1}{3}\leqslant\lambda\leqslant 3$.因此 $\frac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{PD}|}$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3},1\right)\cup(1,3]$.

5.遇到存在性问题时,常是先假定存在,然后根据已知条件或其他定理、公理、法则等推导下去,如与已知或其他定理、公理、法则等不发生矛盾,那么结论就存在;若发生矛盾,那么结论就不存在.

例 21 [2007·宁夏、海南理三(19)]在平面直角坐标系 xOy 中,经过点 $(0,\sqrt{2})$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 有两个不同的交点 P 和 Q.

(1)求 k 的取值范围;

(2)设椭圆与 x 轴正半轴,y 轴正半轴的交点分别 A,B,是否存在常数 k,使得向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线?如果存在,求 k 值;如果不存在,请说明理由.

解 (1)l 方程为 $y=kx+\sqrt{2}$,代入椭方程得 $\frac{x^2}{2}+(kx+\sqrt{2})^2=1$,得

$$\left(\frac{1}{2}+k^2\right)x^2+2\sqrt{2}kx+1=0 \quad ①$$

由 $\Delta>0$,得 $k\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$.

(2)设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$,由方程①得

$$x_1+x_2=-\frac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2} \quad ②$$

又
$$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{1+2k^2} \quad ③$$

而 $A(\sqrt{2},0)$，$B(0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},1)$，所以 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线等价于 $x_1+x_2=-\sqrt{2}(y_1+y_2)$，将②，③代入上式得 $\frac{-4\sqrt{2}k}{1+2k^2}=\frac{-\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{1+2k^2}$，解得 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由(1)知 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$，故没有符合题意的常数 k.

例 22　[2008·陕西理三(20)、文三(21)]已知抛物线 $C:y=2x^2$，直线 $y=kx+2$ 交 C 于 A，B 两点，M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交抛物线于点 N.

(1)证明：抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行；

(2)是否存在实数 k，使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由.

解　(1)如图 5.11，设 $A(x_1,2x_1^2)$，$B(x_2,2x_2^2)$，把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得 $2x^2-kx-2=0$，由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{k}{2}$，$x_1x_2=-1$，所以 $x_N=x_M=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{k}{4}$，所以 $N(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8})$. 因为 $y=2x^2$，所以 $y'=4x$，则抛物线在点 N 处的切线 l 的斜率为 $4\times\frac{k}{4}=k$，所以 $l/\!/AB$.

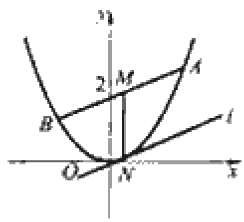


图 5.11

(2)假设存在实数 k，使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$. 由(1)知
$$\overrightarrow{NA}=\left(x_1-\frac{k}{4},2x_1^2-\frac{k^2}{8}\right),\overrightarrow{NB}=\left(x_2-\frac{k}{4},2x_2^2-\frac{k^2}{8}\right)$$

则
$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}&=\left(x_1-\frac{k}{4}\right)\left(x_2-\frac{k}{4}\right)+\left(2x_1^2-\frac{k^2}{8}\right)\left(2x_2^2-\frac{k^2}{8}\right)=\\&\left(x_1-\frac{k}{4}\right)\left(x_2-\frac{k}{4}\right)+4\left(x_1^2-\frac{k^2}{16}\right)\left(x_2^2-\frac{k^2}{16}\right)=\\&\left(x_1-\frac{k}{4}\right)\left(x_2-\frac{k}{4}\right)\left[1+4\left(x_1+\frac{k}{4}\right)\left(x_2+\frac{k}{4}\right)\right]=\\&\left[x_1x_2-\frac{k}{4}(x_1+x_2)+\frac{k^2}{16}\right]\left[1+4x_1x_2+k(x_1+x_2)+\frac{k^2}{4}\right]=\\&\left(-1-\frac{k}{4}\times\frac{k}{2}+\frac{k^2}{16}\right)\left[1+4\times(-1)+k\times\frac{k}{2}+\frac{k^2}{4}\right]=\\&\left(-1-\frac{k^2}{16}\right)\left(-3+\frac{3}{4}k^2\right)=0\end{aligned}$$

因为 $-1-\frac{k^2}{16}<0$，所以 $-3+\frac{3}{4}k^2=0$，解得 $k=\pm 2$，即存在 $k=\pm 2$，使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

例 23 设 G,H 分别为非等边$\triangle ABC$ 的重心与外心，$A(0,2)$，$B(0,-2)$，且$\overrightarrow{GH}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$.

(1)求点 $C(x,y)$的轨迹 E 的方程；

(2)过点(2,0)作直线 l 与曲线 E 交于 M,N 两点，设$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，是否存在这样的直线 l，使四边形 $OMPN$ 是矩形？若存在，求出直线的方程；若不存在，试说明理由.

解 (1)由已知得 $G\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)$，又$\overrightarrow{GH}=\lambda\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{GH}\parallel y$ 轴，又 H 在 x 轴上，所以 $H(\frac{x}{3},0)$. 因为 $CH=HA$，所以

$$\left(x-\frac{x}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{x}{3}\right)^2+4$$

即$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$(因为$\triangle ABC$ 是非等边三角形，所以 $x\neq\pm 2\sqrt{3}$).

(2)设 l 方程为 $y=k(x-2)$，代入曲线 E 得$(3k^2+1)x^2-12k^2x+12(k^2-1)=0$. 设 $N(x_1,y_1)$，$M(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{12(k^2-1)}{3k^2+1}$，因为$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}$，所以四边形 $OMPN$ 是平行四边形. 若四边形 $OMPN$ 是矩形，则$\overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{OM}$，所以

$$x_1x_2+y_1y_2=0,\ y_1y_2=k^2(x_1-2)\cdot(x_2-2)=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]$$

则
$$\frac{12(k^2-1)}{3k^2+1}+k^2\left[\frac{12(k^2-1)}{3k^2+1}-\frac{24k^2}{3k^2+1}+4\right]=0$$
$$3(k^2-1)+k^2(3k^2-3-6k^2+3k^2+1)=0$$

$k^2=3$，$k=\pm\sqrt{3}$，所以直线 l 为 $y=\pm\sqrt{3}(x-2)$.

注意 向量中常见三角形的几个"心"：①在$\triangle ABC$ 中，给出$\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$，等于已知 O 是$\triangle ABC$ 的外心；②在$\triangle ABC$ 中，给出$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，等于已知 O 是$\triangle ABC$ 的重心；③在$\triangle ABC$ 中，给出$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，等于已知 O 是$\triangle ABC$ 的垂心；④在$\triangle ABC$ 中，给出$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)(\lambda\in\mathbf{R}^+)$，等于已知$\overrightarrow{AP}$通过$\triangle ABC$ 的内心；⑤在$\triangle ABC$ 中，给出 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，等于已知 O 是$\triangle ABC$ 的内心.

求动点轨迹方程时，先设出动点坐标(有时还须设出参数)，依已知向量关

系式的几何意义(例18)或通过坐标运算(例16、例17)),得出动点的轨迹方程(或参数方程,再消去参数,如例19).

例24 [2006·陕西文理三(21)]如图5.12,三定点$A(2,1)$,$B(0,-1)$,$C(-2,1)$,三动点D,E,M满足$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BE}=t\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DE}$,$t\in[0,1]$.

(1)求动直线DE斜率的变化范围;

(2)求动点M的轨迹方程.

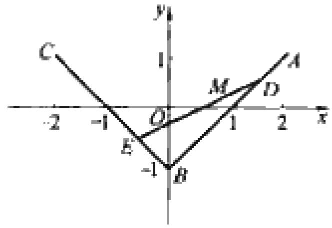


图5.12

解 (1)设$D(x_D,y_D)$,$E(x_E,y_E)$,$M(x,y)$,

由$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}$得$(x_D-2,y_D-1)=t(-2,-2)$,所以$\begin{cases}x_D=-2t+2\\y_D=-2t+1\end{cases}$,同理由$\overrightarrow{BE}=t\overrightarrow{BC}$得$\begin{cases}x_E=-2t\\y_E=-2t-1\end{cases}$,所以$k_{DE}=\dfrac{(2t-1)-(-2t+1)}{-2t-(-2t+2)}=1-2t$.

因为$t\in[0,1]$,所以$k_{DE}\in[-1,1]$.

(2)因为$\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DE}$,所以

$$(x+2t-2,y+2t-1)=t(-2t+2t-2,2t-1+2t-1)=(-2t,4t^2-2t)$$

则$\begin{cases}x=2(1-2t)\\y=(1-2t)^2\end{cases}$,所以$y=\dfrac{x^2}{4}$.因为$t\in[0,1]$,所以$x\in[-2,2]$.则所求轨迹方程为$y=\dfrac{1}{4}x^2$,$x\in[-2,2]$.

例25 [2007·湖南理三(20)]已知双曲线$x^2-y^2=2$的左、右焦点分别为F_1,F_2,过点F_2的动直线与双曲线相交于A,B两点.

(1)若动点M满足$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$(其中$O$为坐标原点),求点$M$的轨迹方程;

(2)在x轴上是否存在定点C,使$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$为常数?若存在,求出点$C$的坐标;若不存在,请说明理由.

解 $F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.设$M(x,y)$,则$\overrightarrow{F_1M}=(x+2,y)$,$\overrightarrow{F_1A}=(x_1+2,y_1)$,$\overrightarrow{F_1B}=(x_2+2,y_2)$,$\overrightarrow{F_1O}=(2,0)$.由$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$,得$\begin{cases}x+2=x_1+x_2+6\\y=y_1+y_2\end{cases}$,即$\begin{cases}x_1+x_2=x-4\\y_1+y_2=y\end{cases}$,于是$AB$的中点坐标为$\left(\dfrac{x-4}{2},\dfrac{y}{2}\right)$.

当AB不与x轴垂直时$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\dfrac{y}{2}}{\dfrac{x-4}{2}-2}=\dfrac{y}{x-8}$,即$y_1-y_2=\dfrac{y}{x-8}(x_1-$

x_2). 因为 A, B 两点在双曲线上, 所以 $x_1^2-y_1^2=2$, $x_2^2-y_2^2=2$. 两式相减得

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2)=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$$

即

$$(x_1-x_2)(x-4)=(y_1-y_2)y$$

将 $y_1-y_2=\frac{y}{x-8}(x_1-x_2)$ 代入上式, 化简得 $(x-6)^2-y^2=4$.

当 AB 与 x 轴垂时 $x_1=x_2=2$, 求得 $M(8,0)$ 也满足上述方程, 故点 M 的轨迹方程是 $(x-6)^2-y^2=4$.

(2)假设在 x 轴上存在定点 $C(m,0)$, 使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数.

当 AB 不与 x 轴垂直时, 设直线 AB 的方程是 $y=k(x-2)(k\neq\pm1)$, 代入 $x^2-y^2=2$, 有

$$(1-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+2)=0$$

则 x_1, x_2 为上述方程的两个实根, 所以

$$x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-1}, x_1x_2=\frac{4k^2+2}{k^2-1}$$

于是 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1-m)(x_2-m)+k^2(x_1-2)(x_2-2)=(k^2+1)x_1x_2-(2k^2+m)(x_1+x_2)+4k^2+m^2=\frac{(k^2+1)(4k^2+2)}{k^2-1}-\frac{4k^2(2k^2+m)}{k^2-1}+4k^2+m^2=\frac{2(1-2m)k^2+2}{k^2-1}+m^2=2(1-m)+\frac{4-4m}{k^2-1}+m^2$.

因为 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 是与 k 无关的常数, 所以 $4-4m=0$, $m=1$, 此时 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-1$.

当 AB 与 x 轴垂直时, 点 A, B 的坐标为 $(2,\sqrt{2})$, $(2,-\sqrt{2})$, 此时 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(1,\sqrt{2})\cdot(1,-\sqrt{2})=-1$.

因此, 在 x 轴上存在定点 $C(1,0)$, 使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数.

例 26 [2005·辽宁文理三(21)]如图 5.13, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, Q 是椭圆外的动点, 满足 $|\overrightarrow{F_1Q}|=2a$, 点 P 是线段 F_1Q 与该椭圆的交点, 点 T 在线段 F_2Q 上, 并且满足 $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0$, $|\overrightarrow{TF_2}|\neq0$.

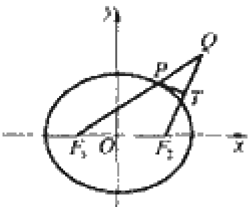


图 5.13

(1)设 x 为点 P 的横坐标, 证明: $|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x$;

(2)求点 T 的轨迹 C 的方程;

(3)试问: 在点 T 的轨迹 C 上, 是否存在点 M 使 $\triangle F_1MF_2$ 的面积 $S=b^2$, 若存在, 求 $\angle F_1MF_2$ 的正切值; 若不存在, 请说明理由.

证明　(1)由椭圆第二定义易证得$|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x$.

(2)设 T 的坐标为(x_1,y),当点 Q 在 x 轴上时,易得 $T(a,0)$和 $T(-a,0)$.当点 Q 不在 x 轴上时,$|\overrightarrow{PT}|\neq 0$,因为$|\overrightarrow{TF_2}|\neq 0$,且$\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0$,所以$PT\perp TF_2$.又$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{F_1Q}|-|\overrightarrow{PF_1}|=2a-|\overrightarrow{PF_1}|=|\overrightarrow{PF_2}|$,所以 T 为 F_2Q 中点,则 $OT \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}|\overrightarrow{F_1Q}|=a$,所以点 T 的轨迹是以原点 O 为圆心,半径为 a 的圆,其方程为 $x^2+y^2=a^2$.

(3)$a<\frac{b^2}{c}$时,不存在;$a\geqslant\frac{b^2}{c}$时,存在点 M,此时 $\tan\angle F_1MF_2=2$.解法略.

例 27　[2004·辽宁文理三(19)]设椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$,过点 $M(0,1)$的直线 l 交椭圆于点 A,B,O 是坐标原点,点 P 满足$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,点 N 的坐标为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,当 l 绕点 M 旋转时,求

(1)动点 P 的轨迹方程;

(2)$|\overrightarrow{NP}|$的最小值与最大值.

解　(1)直线 l 过点 $M(0,1)$,设其斜率为 k,则 l 的方程为 $y=kx+1$,记 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题设可得点 A,B 的坐标(x_1,y_1),(x_2,y_2)是方程组

$$\begin{cases}y=kx+1 & ①\\ x^2+\frac{y^2}{4}=1 & ②\end{cases}$$

的解.将①代入②并化简得

$$(4+k^2)x^2+2kx-3=0$$

所以
$$x_1+x_2=-\frac{2k}{4+k^2}$$

从而
$$y_1+y_2=\frac{8}{4+k^2}$$

于是
$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-k}{4+k^2},\frac{4}{4+k^2}\right)$$

设点 P 的坐标为(x,y),则

$$\begin{cases}x=\frac{-k}{4+k^2} & ③\\ y=\frac{4}{4+k^2} & ④\end{cases}$$

$\frac{③}{④}$得 $k=-\frac{4x}{y}$,代入④并整理得

$$4x^2+y^2-y=0 \quad ⑤$$

当 k 不存在时，A，B 中点为坐标原点 $(0,0)$，也满足方程⑤，所以点 P 的轨迹方程是 $4x^2+y^2-y=0$.

(2)最小值 $\frac{1}{4}$，最大值 $\frac{\sqrt{21}}{6}$，解法略.

·**例 28** [2003·天津理三(21)、文三(22)、江苏文、理三(20)]已知常数 $a>0$，向量 $c=(0,a)$，$i=(1,0)$，经过原点 O 以 $c+\lambda i$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0,a)$ 以 $i-2\lambda c$ 为方向向量的直线相交于点 P，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$，试问：是否存在两个定点 E，F，使得 $|PE|+|PF|$ 为定值？若存在，求出 E，F 的坐标；若不存在，说明理由.

解 $c+\lambda i=(\lambda,a)$，$i-2\lambda c=(1,-2\lambda a)$，若 $\lambda\neq0$，则直线 OP 方程为

$$y=\frac{a}{\lambda}x \quad ①$$

AP 方程为 $$y=-2\lambda ax+a \quad ②$$

由①，②消去参数 λ 得 $$y^2-ay+2a^2x^2=0 \quad ③$$

若 $\lambda=0$，则直线 OP：$x=0$，AP：$y=a$，得 $P(0,a)$ 仍满足方程③，故点 P 的轨迹方程为 $2a^2x^2+y^2-ay=0$，即

$$\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+\frac{(y-\frac{a}{2})^2}{\frac{a^2}{4}}=1(a>0)$$

因此，①当 $\frac{a^2}{4}=\frac{1}{8}$，即 $a=\frac{\sqrt2}{2}$ 时，轨迹是圆，故不存在符合题意的定点 E，F；②当 $\frac{a^2}{4}<\frac{1}{8}$，即 $0<a<\frac{\sqrt2}{2}$ 时，轨迹是椭圆，其两焦点 $E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2}\right)$ 和 $F\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2}\right)$ 是满足题设条件的两个定点；③当 $\frac{a^2}{4}>\frac{1}{8}$，即 $a>\frac{\sqrt2}{2}$ 时，轨迹是椭圆，其两焦点 $E\left(0,\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}})\right)$ 和 $F\left(0,\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}})\right)$ 为满足题意的两个定点.

例 29 如图 5.14，过点 $A(0,a)$ 作直线交圆 M：$(x-2)^2+y^2=1$ 于 B，C 两点，在线段 BC 上取一点 P，使点 P 满足 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{PC}(\lambda\in\mathbf{R})$.

(1)求点 P 的轨迹；

(2)若(1)的轨迹交圆 M 于点 R，S，求 $\triangle MRS$ 面积 S 的最大值.

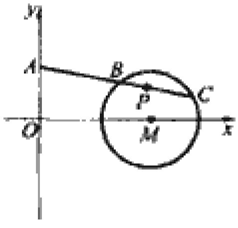


图 5.14

解　(1)设 $P(x,y)$，$B(x_B,y_B)$，$C(x_C,y_C)$，因为

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{PC}(\lambda\in\mathbf{R})$$

所以
$$x_B=\lambda x_C,x-x_B=\lambda(x_C-x)$$

所以
$$\frac{x-x_B}{x_C-x}=\frac{x_B}{x_C}$$

则
$$x=\frac{2x_Bx_C}{x_B+x_C} \quad ①$$

设过点 A 所作直线 AB 的方程为 $y=kx+a$（显然 k 存在），又由

$$\begin{cases}y=kx+a\\(x-2)^2+y^2=1\end{cases}$$

得
$$(1+k^2)x^2+(2ak-4)x+a^2+3=0$$

所以
$$x_B+x_C=\frac{4-2ak}{1+k^2},x_Bx_C=\frac{a^2+3}{1+k^2}$$

代入①得

$$x=\frac{a^2+3}{2-ak} \quad ②$$

所以

$$y=kx+a=\frac{2a+3k}{2-ak} \quad ③$$

由②得 $k=\dfrac{2x-a^2-3}{ax}$，代入③得

$$y=\frac{2a+\dfrac{3(2x-a^2-3)}{ax}}{\dfrac{a^2+3}{x}}=\frac{2x(a^2+3)-3(a^2+3)}{a(a^2+3)}=\frac{2x-3}{a}$$

则所求轨迹方程为 $2x-ay-3=0$，即 $y=\dfrac{2}{a}(x-\dfrac{3}{2})$，轨迹为过定点$(\dfrac{3}{2},0)$的直线，在圆 M 内的部分.

(2) $S_{max}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，解法略.

二、走进考场 9

*1.［2008·山东理三(22)］如图 5.15，设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$，M 为直线 $y=-2p$ 上任意一点，过 M 引抛物线的切线，切点分别为 A,B.

(1)求证：A,M,B 三点的横坐标成等差数列；

(2)已知当点 M 的坐标为$(2,-2p)$时，$|AB|=4\sqrt{10}$，求此时抛物线的方

程；

(3)是否存在点 M，使得点 C 关于直线 AB 的对称点 D 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$上，其中，点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$（$O$ 为坐标原点）。若存在，求出所有适合题意的点 M 的坐标，若不存在，请说明理由.

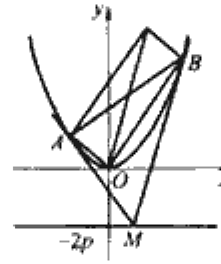


图 5.15

2. [2008·全国卷Ⅰ理三(21)、文三(22)]双曲线的中心为原点 O，焦点在 x 轴上，两条渐近线分别为 l_1，l_2，经过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1，l_2 于 A，B 两点，已知 $|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{AB}|$，$|\overrightarrow{OB}|$ 成等差数列，且 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向.

(1)求双曲线的离心率；

(2)设 AB 被双曲线所截得的线段的长为 4，求双曲线的方程.

3. [2008·全国卷Ⅱ理三(21)、文三(20)]设椭圆中心在坐标原点，$A(2,0)$，$B(0,1)$是它的两个顶点，直线 $y=kx(k>0)$与 AB 相交于点 D，与椭圆相交于 E，F 两点.

(1)若 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$，求 k 的值；

(2)求四边形 $AEBF$ 面积的最大值.

4. [2008·上海文三(20)]已知双曲线 $C:\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

(1)求双曲线 C 的渐近线方程；

(2)已知点 M 的坐标为$(0,1)$，设 P 是双曲线 C 上的点，Q 是点 P 关于原点的对称点，记 $\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$，求 λ 的取值范围.

(3)已知点 D，E，M 的坐标分别为$(-2,-1)$，$(2,-1)$，$(0,1)$，P 为双曲线 C 上在第一象限内的点，记 l 为经过原点与点 P 的直线，S 为 $\triangle DEM$ 截直线 l 所得线段的长. 试将 S 表示为直线 l 的斜率 k 的函数.

5. [2008·辽宁理三(20)、文三(21)]在直角坐标系 xOy 中，点 P 到两点$(0,-\sqrt{3})$，$(0,\sqrt{3})$的距离之和等于 4. 设点 P 的轨迹为 C，直线 $y=kx+1$ 与 C 交于 A，B 两点.

(1)写出 C 的方程；

(2)若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，求 k 的值；[文科]：此时 $|\overrightarrow{AB}|$ 的值是多少？

(3)[理科]若点 A 在第一象限，证明：当 $k>0$ 时，恒有 $|\overrightarrow{OA}|>|\overrightarrow{OB}|$.

6. [2008·江西文、理一(7)]已知 F_1，F_2 是椭圆的两个焦点，满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 在椭圆内部，则椭圆离心率的取值范围是 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,\frac{1}{2}]$　　C. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D. $[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

7.[2008·四川文三(22)]设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$,离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,点$F_2$到右准线$l$的距离为$\sqrt{2}$.

(1)求a,b的值;

(2)设M,N是l上的两个动点,$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$,证明:当$|\overrightarrow{MN}|$取最小值时,$\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}=0$.

8.[2007·辽宁理二(14)、文二(16)]设椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点$P$到左准线的距离为10,$F$是该椭圆的左焦点,若点$M$是$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF})$,则$|\overrightarrow{OM}|=$______.

9.[2007·湖南文三(19)]已知双曲线$x^2-y^2=2$的右焦点为F,过点F的动直线与双曲线相交于A,B两点,点C的坐标是(1,0).

(1)证明:$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$为常数;

(2)若动点M满足$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CO}$(其中$O$为坐标原点),求点$M$的轨迹方程.

10.[2007·全国卷Ⅱ理一(12)]设F为抛物线$y^2=4x$的焦点,A,B,C为该抛物线上三点,若$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=0$,则$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|$等于　(　　)

A.9　　B.6　　C.4　　D.3

11.[2007·全国卷Ⅱ文一(12)]设F_1,F_2分别是双曲线$x^2-\frac{y^2}{9}=1$的左、右焦点,若点P在双曲线上,且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,则$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$等于　(　　)

A.$\sqrt{10}$　　B.$2\sqrt{10}$　　C.$\sqrt{5}$　　D.$2\sqrt{5}$

12.[2007·江苏文理三(19)]如图5.16,在平面直角坐标系xOy中,过y轴正方向上一点$C(0,c)$任作一直线,与抛物线$y=x^2$相交于A,B两点,一条垂直于x轴的直线分别与线段AB和直线$l:y=-c$交于点P,Q.

(1)若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$,求$c$的值;

(2)若P为线段AB的中点,求证:OA为此抛物线的切线;

(3)试问(2)的逆命题是否成立?说明理由.

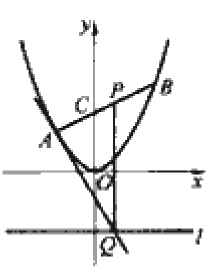


图5.16

13.[2007·四川理三(20)、文三(21)]设F_1,F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右焦点.

(1)若 P 是该椭圆上的一个动点,求$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的最大值和最小值;

(2)设过定点 $M(0,2)$的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A,B,且$\angle AOB$ 为锐角(其中 O 为坐标原点),求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

14.[2007·宁夏、海南文三(21)]在平面直角坐标系 xOy 中,已知圆 $x^2+y^2-12x+32=0$ 的圆心为 Q,过点 $P(0,2)$且斜率为 k 的直线与圆 Q 相交于不同的两点 A,B.

(1)求 k 的取值范围;

(2)是否存在常数 k,使得向量$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{PQ}$共线?如果存在,求 k 值;如果不存在,请说明理由.

15.[2006·江西理一(4)]设 O 为坐标原点,F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点,A 为抛物线上一点,若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}=-4$,则点 A 的坐标为 ( )

A. $(2,\pm2\sqrt{2})$　B. $(1,\pm2)$　C. $(1,2)$　D. $(2,2\sqrt{2})$

16.[2006·上海理三(20)]在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 与抛物线$y^2=2x$ 相交于 A,B 两点.

(1)求证:"如果直线 l 过点 $F(3,0)$,那么$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题;

(2)写出(1)中命题的逆命题,判断它是真命题还是假命题,并说明理由.

17.[2006·湖北理一(7)、文一(9)]设过点 $P(x,y)$的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A,B 两点,点 Q 与点 P 关于 y 轴对称,O 为坐标原点,若$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$,且$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$,则点 P 的轨迹方程是 ( )

A. $3x^2+\frac{3}{2}y^2=1(x>0,y>0)$　B. $3x^2-\frac{3}{2}y^2=1(x>0,y>0)$

C. $\frac{3}{2}x^2-3y^2=1(x>0,y>0)$　D. $\frac{3}{2}x^2+y^2=1(x>0,y>0)$

18.[2006·江苏文、理一(6)]已知两点 $M(-2,0)$,$N(2,0)$,点 P 为坐标平面内的动点,满足$|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{MP}|+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}=0$,则动点 $P(x,y)$的轨迹方程为 ( )

A. $y^2=8x$　B. $y^2=-8x$　C. $y^2=4x$　D. $y^2=-4x$

19.[2006·天津文三(22)]如图 5.17,双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$,$F_1$,$F_2$ 分别为左、右焦点,M 为左准线与渐近线在第二象限内的交点,且$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=-\frac{1}{4}$.

(1)求双曲线的方程;

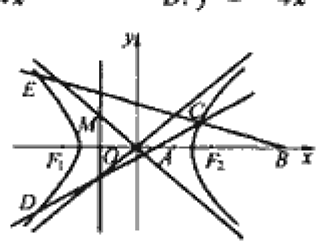


图 5.17

(2)设 $A(m,0)$ 和 $B(\frac{1}{m},0)(0<m<1)$ 是 x 轴上的两点，过点 A 作斜率不为零的直线 l，使得 l 交双曲线于 C，D 两点，作直线 BC 交双曲线于另一点 E，证明：直线 $DE\perp x$ 轴.

20.［2006·辽宁理三(20)、文三(22)］已知点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$(x_1x_2\neq 0)$是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的两个动点，O 是坐标原点，向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 满足 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$. 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0$.

(1)证明：线段 AB 是圆 C 的直径；

(2)当圆 C 的圆心到直线 $x-2y=0$ 的距离的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，求 P 的值.

21.［2006·四川理三(21)、文三(22)］已知两定点 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$满足条件 $|\overrightarrow{PF_2}|-|\overrightarrow{PF_1}|=2$ 的点的轨迹是曲线 E，直线 $y=kx-1$ 与曲线 E 交于 A，B 两点.

(1)［文科］求 k 的取值范围；

(2)［理科、文科］如果 $|AB|=6\sqrt{3}$，且曲线 E 上存在点 C，使 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OC}$，求 m 的值和△ABC 的面积 S.

22.［2005·湖南理二(13)］已知直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ ________.

23.［2005·全国卷Ⅲ文、理一(9)］已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，点 M 在双曲线上，且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则点 M 到 x 轴的距离为 (　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

24.［2005 上海理一(3)，文一(4)］直角坐标平面 xOy 中，若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\varphi$，则点 P 的轨迹方程是________.

25.［2005·江西文理二(16)］以下四个关于圆锥曲线的命题：①设 A，B 为两个定点，k 为非零常数，若 $|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=k$，则动点 P 的轨迹为双曲线；②过定圆 C 上一定点 A 作圆的动弦 AB，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，则动点 P 的轨迹为椭圆；③方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率；④双曲线 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{35}+y^2=1$ 有相同的焦点.

其中真命题的序号为________(写出所有真命题的序号).

26.[2005·全国卷Ⅱ理三(21)、文三(22)]P,Q,M,N 四点都在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上，F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点，已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线，$\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线，且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$，求四边形 $PMQN$ 面积的最小值和最大值.

*27.[2005·福建理三(21)、文三(22)]如图 5.18，已知方向向量为 $\boldsymbol{v}=(1,\sqrt{3})$ 的直线 l 过点 $(0,-2\sqrt{3})$ 和椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点，且椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上.

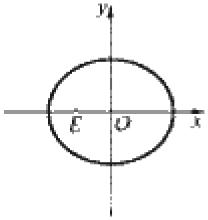


图 5.18

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)是否存在过点 $E(-2,0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M,N，满足 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON\neq 0$（$O$ 为原点），若存在，求直线 m 的方程；若不存在，请说明理由.

28.[2005·重庆理三(21)]已知椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点，而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点.

(1)求双曲线 C_2 的方程；

(2)若直线 $l:y=kx+\sqrt{2}$ 与椭圆 C_1 及双曲线 C_2 都恒有两个不同的交点，且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$（其中 O 为原点），求 k 的取值范围.

29.[2005·重庆文三(21)]已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $(2,0)$，右顶点为 $(\sqrt{3},0)$.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)若直线 $l:y=kx+\sqrt{2}$ 与双曲线恒有两个不同的交点 A 和 B，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$（其中 O 为原点），求 k 的取值范围.

30.[2005·湖南理三(19)、文三(21)]已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2，离心率为 e，直线 $l:y=ex+a$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A,B，M 是直线 l 与椭圆 C 的一个公共点，P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点，设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

(1)证明：$\lambda=1-e^2$；

(2)确定 λ 的值，使得 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形.

31.[2004·全国卷Ⅰ文、理三(21)]设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 与直线

$l:x+y=1$ 相交于两个不同的点 A,B.

(1)求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围;

(2)设直线 l 与 y 轴的交点为 P,且 $\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$,求 a 的值.

32.[2004·湖南理三(21)]如图 5.19,过抛物线 $x^2=4y$ 的对称轴上任一点 $P(0,m)(m>0)$ 作直线与抛物线交于 A,B 两点,点 Q 是点 P 关于原点的对称点.

(1)设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ,证明:$\overrightarrow{OP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$;

(2)设直线 AB 的方程是 $x-2y+12=0$,过 A,B 两点的圆 C 与抛物线在点 A 处有共同的切线,求圆 C 的方程.

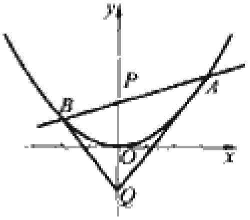


图 5.19

33.[2004·辽宁文、理一(6)]已知点 $A(-2,0),B(3,0)$,动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2$,则点 P 的轨迹是　　(　　)

A.圆　　B.椭圆　　C.双曲线　　D.抛物线

34.[2002·天津理一(10)、文一(12)]在平面直角坐标系中,O 为坐标原点,已知两点 $A(3,1),B(-1,3)$,若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$,其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,且 $\alpha+\beta=1$,则点 C 的轨迹方程为　　(　　)

A. $3x+2y-11=0$　　B. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

C. $2x-y=0$　　D. $x+2y-5=0$

35.[2002·天津理三(22)、文三(22)]已知两点 $M(-1,0),N(1,0)$,且点 P 使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN},\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列.

(1)点 P 的轨迹是什么曲线?

(2)若点 P 坐标为 (x_0,y_0),记 θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角,求 $\tan\theta$.

36.[2001·天津文理一(10)]设坐标原点为 O,抛物线 $y^2=2x$ 与过焦点的直线交于 A,B 两点,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 等于　　(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. 3　　D. -3

三、答案与提示

1.(1)略　(2) $x^2=2y$ 或 $x^2=4y$　(3) $M(0,-2p)$　提示:(3)设 $D(x_3,y_3),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_0,-2p)$,则 $C(x_1+x_2,y_1+y_2)$,CD 中点 $Q\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\right)$.设直线 AB 方程为 $y-y_1=k_{AB}(x-x_1)$,而 $k_{AB}=$

$\dfrac{\frac{x_2^2}{2p}-\frac{x_1^2}{2p}}{x_2-x_1}=\dfrac{x_1+x_2}{2p}=\dfrac{x_0}{p}$. 由点 Q 在 AB 上，OC 中点 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ 也在 AB 上，代入得 $y_3=\dfrac{x_0}{p}x_3$. 若 $D(x_3,y_3)$ 在抛物线上，则 $x_3^2=2py_3=2x_0x_3$，因此 $x_3=0$ 或 $x_3=2x_0$，即 $D(0,0)$ 或 $D\left(2x_0,\dfrac{2x_0^2}{p}\right)$. ①当 $x_0=0$ 时，$x_1+x_2=2x_0=0$，此时点 $M(0,-2p)$ 适合题意；②当 $x_0\neq0$ 时，对于 $D(0,0)$，此时 $C\left(2x_0,\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2p}\right)$，$k_{CD}=\dfrac{\frac{x_1^2+x_2^2}{2p}}{2x_0}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4px_0}$，又 $k_{AB}=\dfrac{x_0}{p}$，$AB\perp CD$，所以 $k_{AB}\cdot k_{CD}=\dfrac{x_0}{p}\cdot\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4px_0}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4p^2}=1$，即 $x_1^2+x_2^2=-4p^2$，矛盾. 对于 $D\left(2x_0,\dfrac{2x_0^2}{p}\right)$，因为 $C\left(2x_0,\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2p}\right)$，此时直线 CD // y 轴，又 $k_{AB}=\dfrac{x_0}{p}\neq0$，所以直线 AB 与 CD 不垂直，与题设矛盾，所以当 $x_0\neq0$ 时不存在适合题意的点 M

2.(1)$\dfrac{\sqrt5}{2}$　(2)$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{9}=1$　提示：(1)因为 $2|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|$，又 $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2$，所以 $|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+\left(\dfrac{|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|}{2}\right)^2$，化简得 $(5|\overrightarrow{OA}|-3|\overrightarrow{OB}|)(|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|)=0$，于是 $\tan\angle AOB=\dfrac{4}{3}$. 又 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向，故 $\angle AOF=\dfrac12\angle AOB$，所以 $\dfrac{2\tan\angle AOF}{1-\tan^2\angle AOF}=\dfrac43$，解得 $\tan\angle AOF=\dfrac12$ 或 $\tan\angle AOF=-2$(舍去)，因此 $\dfrac{b}{a}=\tan\angle AOF=\dfrac12$

3.(1)$\dfrac23$ 或 $\dfrac38$　(2)$2\sqrt2$　提示：(1)设 $D(x_0,kx_0)$，$E(x_1,kx_1)$，$F(x_2,kx_2)$，$x_1<x_2$，且 x_1,x_2 满足椭圆方程 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 及直线方程 $y=kx$，故 $x_2=-x_1=\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$①. 由 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$ 得 $x_0-x_1=6(x_2-x_0)$，所以 $x_0=\dfrac17(6x_2+x_1)=\dfrac57x_2=\dfrac{10}{7\sqrt{1+4k^2}}$，由 D 在 AB 上知 $x_0+2kx_0=2$，得 $x_0=\dfrac{2}{1+2k}$，所以 $\dfrac{2}{1+2k}=\dfrac{10}{7\sqrt{1+4k^2}}$，化简得 $24k^2-25k+6=0$

4. (1) $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　(2) $(-\infty,-1]$　(3) $S(k)=\begin{cases}\frac{2}{1-k^2}\sqrt{1+k^2},0<k\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{2k+1}{k+k^2}\sqrt{1+k^2},\frac{1}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$　提示：(2)设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_0,-y_0)$，$\lambda=-\frac{3}{2}x_0^2+2$，$|x_0|\geqslant\sqrt{2}$

5. (1) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$　(2) $\pm\frac{1}{2}$　提示：(3) $|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)=(x_1^2-x_2^2)+4(1-x_1^2-1+x_2^2)=-3(x_1-x_2)(x_1+x_2)=\frac{6k(x_1-x_2)}{k^2+4}$，$x_1>0$，由 $x_1x_2=-\frac{3}{k^2+4}$ 知 $x_2<0$

6. C　提示：由 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 知点 M 轨迹方程为 $x_2^2+y^2=c^2$，其中 F_1F_2 为直径，设 P 为椭圆上任一点，则 $|OP|>c$ 恒成立. 由椭圆性质知 $|OP|\geqslant b$(b 为椭圆短半轴长)，所以 $b>c$

7. (1) $a=2$, $b=\sqrt{2}$　提示：(2) $F_1(-\sqrt{2},0)$, $F_2(\sqrt{2},0)$, $l: x=2\sqrt{2}$. 设 $M(2\sqrt{2},y_1)$, $N(2\sqrt{2},y_2)$，由 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$ 得 $y_2=-\frac{6}{y_1}$，$|\overrightarrow{MN}|=|y_1-y_2|=\left|y_1+\frac{6}{y_1}\right|=|y_1|+\frac{6}{|y_1|}\geqslant2\sqrt{6}$，当且仅当 $y_1=\pm\sqrt{6}$ 时，上式取等号，此时 $y_2=-y_1$，所以 $\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}=(-2\sqrt{2},0)+(\sqrt{2},y_1)+(\sqrt{2},y_2)=0$

8. 2　提示：椭圆左准线 $x=-\frac{25}{3}$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0+\frac{25}{3}=10$. $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{5}{3},\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{2}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

9. (1)常数为 -1　(2) $x^2-y^2=4$　提示：(1)设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，当 $AB\perp x$ 轴时，$A(2,\sqrt{2})$, $B(2,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-1$；当 AB 不与 x 轴垂直时，设 $AB: y=k(x-2)(k\neq\pm1)$，代入 $x^2-y^2=2$ 得 $(1-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+2)=0$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1-1)(x_2-1)+k^2(x_1-2)(x_2-2)$　(2)设 $M(x,y)$，由 $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CO}$ 得 $\begin{cases}x-1=x_1+x_2-3\\ y=y_1+y_2\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1+x_2=x+2\\ y_1+y_2=y\end{cases}$，于是 AB 中点坐标为 $\left(\frac{x+2}{2},\frac{y}{2}\right)$. 当 AB 不与 x 轴垂直时，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{y}{2}}{\frac{x+2}{2}-2}=\frac{y}{x-2}$，即 $y_1-y_2=$

$\frac{y}{x-2}(x_1-x_2)$. 又因为 A,B 在双曲线上，所以 $x_1^2-y_1^2=2$, $x_2^2-y_2^2=2$, 两式相减得 $(x_1-x_2)(x+2)=(y_1-y_2)y$，将 $y_1-y_2=\frac{y}{x-2}(x_1-x_2)$ 代入上式，当 $AB\perp x$ 轴时，$x_1=x_2=2$, $M(2,0)$ 也满足上述方程

10. B　提示：设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$，由 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，得 $x_1-1+x_2-1+x_3-1=0$，即 $x_1+x_2+x_3=3$. 而 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|$ 可转化为 A,B,C 三点到准线的距离，即 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=d_1+d_2+d_3=x_1+1+x_2+1+x_3+1=3+3=6$

11. B　提示：因为 $\angle F_1PF_2=90°$，所以 $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=|2\overrightarrow{PO}|=|\overrightarrow{F_1F_2}|$

12. (1)2　(3)成立　提示：(1)设 $AB: y=kx+c$ 代入 $y=x^2$ 得 $x^2-kx-c=0$，令 $A(a,a^2)$, $B(b,b^2)$，则 $ab=-c$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-c+c^2=2$

13. (1)最大值 1，最小值 -2　(2) $-2<k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}<k<2$　提示：(1)设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x^2+y^2-3=\frac{1}{4}(3x^2-8)$, $x\in[-2,2]$　(2)设 l: $y=kx+2$，代入椭圆方程，由 $\Delta>0$，得 $k>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2>0$, $x_1x_2=\frac{3}{k^2+\frac{1}{4}}$, $y_1y_2=\frac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}$，代入上式解得 $-2<k<2$

14. (1)$(-\frac{3}{4},0)$　(2)不存在　提示：仿例 21

15. B　提示：设 $A(x_0,y_0)$, $y_0^2=4x_0$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}=-4$，得 $x_0^2+3x_0-4=0$

16. (1)略　(2)逆命题是：设直线 l 交抛物线 $y^2=2x$ 于 A,B 两点，如果 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，那么该直线过点 $T(3,0)$. 该命题是假命题　提示：(1)要分 l 是否与 x 轴垂直讨论　(2)取抛物线上点 $A(2,2)$, $B(\frac{1}{2},1)$ 验证

17. D　提示：设 $A(a,0)$, $B(0,b)$，由 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ 得 $a=\frac{3}{2}x$, $b=3y$

18. B

19. (1) $x^2-4y^2=1$　(2)略　提示：(1)设 $M(x_0,y_0)$，可求得 $M\left(-\frac{2a}{\sqrt{5}},\frac{2b}{\sqrt{5}}\right)$. 由 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=\frac{4}{5}a^2-c^2+\frac{4}{5}b^2=-\frac{1}{4}$ 得 $c^2=\frac{5}{4}$

20. (1)略　(2)2　提示：(1)将 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$ 两边平方得 $\overrightarrow{OA}\cdot$

$\overrightarrow{OB}=0$，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$ ①，而以 AB 为直径的圆 C 的方程是 $\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[(x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2]$，展开并将式①代人恰为圆 C 方程

21.(1) $-\sqrt{2}<k<-1$　(2) $m=4$，$S=\sqrt{3}$　提示：(1)曲线 E 的方程为 $x^2-y^2=1(x<0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，注意两根均为负数　(2)由弦长公式得 $2\sqrt{\frac{(1+k^2)(2-k^2)}{(1-k^2)^2}}=6\sqrt{3}$，解得 $k=-\frac{\sqrt{5}}{2}$（$k=\frac{\sqrt{5}}{2}$不合）. 设 $C(x_c,y_c)$，由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OC}$ 求得 $C\left(-\frac{4\sqrt{5}}{m},\frac{8}{m}\right)$，代人曲线 E 的方程得 $m=4$（$m=-4$ 不合），C 到 AB 的距离为 $\frac{1}{3}$

22. $-\frac{1}{2}$　提示：圆心角之半等于 $60°$

23. C　提示：设 $M(x_0,y_0)$

24. $x+2y-4=0$

25. ③、④

26. 最小值 $\frac{16}{9}$，最大值 2　提示：设 PQ 方程为 $y=kx+1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则弦长 $|PQ|=\frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2+k^2}$，当 $k\neq0$ 时，由 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$，得 $PF\perp MF$，所以 $k_{MN}=-\frac{1}{k}$，同理得 $|MN|=\frac{2\sqrt{2}\left[1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2\right]}{2+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}$，则 $S_{PMQN}=\frac{1}{2}|PQ||MN|=\frac{4(2+k^2+\frac{1}{k^2})}{5+2k^2+\frac{2}{k^2}}$. 令 $u=k^2+\frac{1}{k^2}\geqslant2$，得 $S=2(1-\frac{1}{5+2u})$ 是增函数，所以 $\frac{16}{9}\leqslant S<2$，当 $k=0$ 时，$S=2$

27. (1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$　(2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $x=-2$　提示：(1)直线 $l:y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$，原点关于 l 的对称点为 $(3,-\sqrt{3})$　(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON$ 得 $|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|\sin\angle MON=\frac{4}{3}\sqrt{6}$，即 $S_{\triangle OMN}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$. 当直线 m 不垂直 x 轴时，设直线 $m:y=k(x+2)$，由弦长公

式 $|MN|=\dfrac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3k^2+1}$，$O$ 到 MN 的距离 $d=\dfrac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}$；当直线 $m\perp x$ 轴时，也满足 $S_{\triangle OMN}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

28.(1) $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　(2) $\left(-1,-\sqrt{\dfrac{13}{15}}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{13}{15}},1\right)$　提示：(2)将 $y=kx+\sqrt{2}$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，由 $\Delta_1>0$ 得 $k^2>\dfrac{1}{4}$①，将 $y=kx+\sqrt{2}$ 代入 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，由 $\Delta_2>0$，得 $k^2<1$ 且 $k^2\neq\dfrac{1}{3}$②，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$，得 $\dfrac{3k^2+7}{3k^2-1}<6$，解得 $k^2>\dfrac{13}{15}$ 或 $k^2<\dfrac{1}{3}$③，由①，②，③求得 k 的取值范围

29.(1) $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　(2) $\left(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$

30.(1)略　(2) $\dfrac{2}{3}$　提示：(1)由 $\begin{cases}y=ex+a\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，得 $M\left(-c,\dfrac{b^2}{a}\right)$. 由 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 得 $\left(-c+\dfrac{a}{e},\dfrac{b^2}{a}\right)=\lambda\left(\dfrac{a}{e},a\right)$　(2)因为 $PF_1\perp l_1$，所以 $\angle PF_1F_2=90°+\angle BAF_1$ 为钝角，所以 $|PF_1|=|F_1F_2|$，$P\left(\dfrac{e^2-3}{e^2+1}c,\dfrac{2(1-e^2)a}{e^2+1}\right)$. 由 $|PF_1|=|F_1F_2|$ 得 $e^2=\dfrac{1}{3}$

31.(1) $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right)\cup(\sqrt{2},+\infty)$　(2) $\dfrac{17}{13}$　提示：(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{PA}=\dfrac{5}{12}\overrightarrow{PB}$ 得 $(x_1,y_1-1)=\dfrac{5}{12}(x_2,y_2-1)$，所以 $x_1=\dfrac{5}{12}x_2$，而 $x_1+x_2=-\dfrac{2a^2}{1-a^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-2a^2}{1-a^2}$，所以 $\dfrac{17}{12}x_2=-\dfrac{2a^2}{1-a^2}$，$\dfrac{5}{12}x_2^2=-\dfrac{2a^2}{1-a^2}$，消去 x_2 得 $-\dfrac{2a^2}{1-a^2}=\dfrac{289}{60}$

32.(1)略　(2) $x^2+y^2+3x-23y+72=0$　提示：(1)设 $AB:y=kx+m$，代入 $x^2=4y$ 得 $x^2-4kx-4m=0$①. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ 得 $\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=0$，即 $\lambda=-\dfrac{x_1}{x_2}$. 又 $Q(0,-m)$，所以 $\overrightarrow{QP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{QB})=2m[y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m]=2m\left[\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{x_1}{x_2}\cdot\dfrac{x_2^2}{4}+\left(1+\dfrac{x_1}{x_2}\right)m\right]=2m(x_1+$

$x_2)\cdot\frac{x_1x_2+4m}{4x_2}=2m(x_1+x_2)\cdot\frac{-4m+4m}{4x_2}=0$

33. D

34. D

35. (1)以原点为圆心，$\sqrt{3}$为半径的右半圆　(2)$|y_0|$　提示：(1)由题意 $2(x^2-1+y^2)=(2x+2)+(2-2x)$，且 $2-2x<2x+2$，即 $x^2+y^2=3$ 且 $x>0$

(2)$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=2$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=2\sqrt{4-x_0^2}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{4-x_0^2}}$，因为 $0<x_0\leqslant\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}<\cos\theta\leqslant1$，$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{3}$

36. B　提示：(特殊位置判断法)取 $AB\perp x$ 轴　$AB: x=\frac{1}{2}$，则 $A(\frac{1}{2},1)$，$B(\frac{1}{2},1)$

第六章　平面向量与导数等其他知识的交汇

一、解法指导

(一)向量与导数交汇

题设中常出现圆锥曲线的切线，利用导数的几何意义求出切线方程.

例 1　[2006 全国卷Ⅱ理三(21)、文三(22)]已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，A，B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$，过 A，B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M.

(1)证明：$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$为定值；

(2)设△ABM 的面积为 S，写出 $S=f(\lambda)$的表达式，并求 S 的最小值.

解　(1)由已知得 $F(0,1)$，$\lambda>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$得 $(-x_1,1-y_1)=\lambda(x_2,y_2-1)$，所以

$$\begin{cases}-x_1=\lambda x_2 & ①\\ 1-y_1=\lambda(y_2-1) & ②\end{cases}$$

将式①两边平方并把 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2$，$y_2=\frac{1}{4}x_2^2$ 代入得

$$y_1=\lambda^2y_2 \qquad ③$$

解式②、③得 $y_1=\lambda$，$y_2=\frac{1}{\lambda}$，且有 $x_1x_2=-\lambda x_2^2=-4\lambda y_2=-4$. 抛物线方程为 $y=\frac{1}{4}x^2$，求导得 $y'=\frac{1}{2}x$，所以过抛物线上 A，B 两点的切线方程分别是

$$y=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)+y_1,\ y=\frac{1}{2}x_2(x-x_2)+y_2$$

即

$$y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2,\ y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$$

联立解得两条切线的交点 M 的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},1\right)$. 所以

$$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},-2\right)\cdot(x_2-x_1,y_2-y_1)=$$
$$\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)-2\left(\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{4}x_1^2\right)=0$$

所以$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$为定值,其值为 0.

(2) $S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^3$, 当 $\lambda=1$ 时, $S_{\min}=4$, 解法略.

例 2　[2005·湖北文理三(17)]已知向量 $\boldsymbol{a}=(x^2,x+1)$, $\boldsymbol{b}=(1-x,t)$. 若函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 在区间$(-1,1)$上是增函数,求 t 的取值范围.

解一　$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x^2(1-x)+t(x+1)=-x^3+x^2+tx+t$, 则

$$f'(x)=-3x^2+2x+t$$

若 $f(x)$在$(-1,1)$上是增函数,则在$(-1,1)$上有 $f'(x)\geqslant 0$. 即 $t\geqslant 3x^2-2x$ 在$(-1,1)$上恒成立. 设 $g(x)=3x^2-2x$, 其图象是对称轴为 $x=\frac{1}{3}$, 开口向上的抛物线, 且 $g(-1)>g(1)$, 因此要使 $t\geqslant 3x^2-2x$ 在区间$(-1,1)$上恒成立$\Leftrightarrow t\geqslant g(-1)$, 即 $t\geqslant 5$. 故 t 的取值范围是 $t\geqslant 5$.

解二　同上得 $f'(x)=-3x^2+2x+t\geqslant 0$, 即 $g(x)=3x^2-2x-t\leqslant 0$ 在$(-1,1)$上恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}g(-1)\leqslant 0\\g(1)\leqslant 0\end{cases}$, 即$\begin{cases}3+2-t\leqslant 0\\3-2-t\leqslant 0\end{cases}$, 解得 $t\geqslant 5$.

(二)向量与概率交汇

例 3　[2007·湖北理一(9)]连掷两次骰子得到的点数分别为 m 和 n, 记向量 $\boldsymbol{a}=(m,n)$与向量 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$的夹角为 θ, 则 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$的概率是 (　　)

A. $\frac{5}{12}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{7}{12}$　　D. $\frac{5}{6}$

解　$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{m-n}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2}}$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, 所以$\begin{cases}m-n\geqslant 0\\\frac{m-n}{\sqrt{2m^2+2n^2}}<1\end{cases}$, 所以 $m\geqslant n$, 则当 $m=1$ 时, $n=1$; 当 $m=2$ 时, $n=1,2$; 当 $m=3$ 时, $n=1,2,3$; 当 $m=4$ 时, $n=1,2,3,4$; 当 $m=5$ 时, $n=1,2,3,4,5$; 当 $m=6$ 时, $n=1,2,3,4,5,6$. 则这样的向量 $\boldsymbol{a}$ 共有 $1+2+3+4+5+6=21$(个), 从而 $P=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$.

(三)向量与物理交汇

例 4　[2005·全国卷Ⅱ理一(10)]点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向

量 $v=(4,-3)$(即点 P 的运动方向与 v 相同，且每秒移动的距离为 $|v|$ 个单位).设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$，则 5 s 后点 P 的坐标为 ( )

A. $(-2,4)$　　B. $(-30,25)$　　C. $(10,-5)$　　D. $(5,-10)$

解　设 5 s 后点 P 移动到 P' 点，则 $\overrightarrow{PP'}=5v=(20,-15)$，$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}=(-10,10)+(20,-15)=(10,-5)$，应选 C.

例 5　已知三个力 $F_1=(-2,-1)$，$F_2=(-3,2)$，$F_3=(4,-3)$ 同时作用在一个静止物体上(只有这三个力作用在该物体上)，试求：

(1)这三个力的合力 F 的坐标；

(2)若在物体上加一个力 F_4 才能使物体保持平衡，求 F_4 的坐标；

(3)若在三个力的作用下，物体的位移 $l=(-2,m)$，求合力 F 所做的功 W.

解　(1)合力 $F=F_1+F_2+F_3=(-1,-2)$.

(2)当 $F_4=-F=(1,2)$ 时，物体才能平衡.

(3)物体从静止到运动，运动的方向与合力 F 的方向是平行的，所以 $l\parallel F$，则 $\frac{-2}{-1}=\frac{m}{-2}$，所以 $m=-4$，则 $l=(-2,-4)$，所以 $W=F\cdot l=(-1)(-2)+(-2)(-4)=10$.

二、走进考场 10

1. [2006·全国卷Ⅰ理三(20)]在平面直角坐标系 xOy 中，有一个以 $F_1(0,-\sqrt{3})$ 和 $F_2(0,\sqrt{3})$ 为焦点，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆.设椭圆在第一象限的部分为曲线 C，动点 P 在 C 上，C 在点 P 处的切线与 x，y 轴的交点分别为 A，B，且向量 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，求：

(1)点 M 的轨迹方程；

(2) $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值.

2. [2006·广东文理三(18)]设函数 $f(x)=-x^3+3x+2$ 分别在 x_1，x_2 处取得极小值、极大值，xOy 平面上点 A，B 的坐标分别为 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，该平面上动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4$，点 Q 是点 P 关于直线 $y=2(x-4)$ 的对称点.

(1)求点 A，B 的坐标；

(2)求动点 Q 的轨道方程.

3.［2005·江西理三(18)］已知向量 $a=\left(2\cos\frac{x}{2},\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right)$，$b=\left(\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}),\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\right)$. 令 $f(x)=a\cdot b$，是否存在实数 $x\in[0,\pi]$，使 $f(x)+f'(x)=0$(其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数)? 若存在，则求出 x 的值；若不存在，则证明之.

4. 平面上有两个向量 $e_1=(1,0)$，$e_2=(0,1)$，今有动点 P 由 $P_0(-1,2)$ 开始，沿着与向量 e_1+e_2 相同的方向作匀速直线运动，速度为 $|e_1+e_2|$；另一动点 Q 从 $Q_0(-2,-1)$ 出发，沿着与向量 $3e_1+2e_2$ 相同的方向作匀速直线运动，速度为 $|3e_1+2e_2|$，设 P,Q 在时刻 $t=0$ s 时分别在 P_0,Q_0 处，则当 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{P_0Q_0}$ 时，时间 t 为多少秒?

三、答案与提示

1. (1) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1(x>1,y>2)$　(2) 3　提示：(1) 曲线 C 方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1(x>0,y>0)$，所以 $y=2\sqrt{1-x^2}(0<x<1)$，则 $y'=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$. 设 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0=2\sqrt{1-x_0^2}$，$y'|_{x=x_0}=-\frac{2x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}=-\frac{4x_0}{y_0}$. 切线方程为 $y=-\frac{4x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0$. 设 $A(x_1,0)$、$B(0,y)$，则 $x=\frac{1}{x_0}$，$y=\frac{4}{y_0}$. 设 $M(x,y)$，由 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{x_0}\\y=\frac{4}{y_0}\end{cases}$，$\begin{cases}x_0=\frac{1}{x}\\y_0=\frac{4}{y}\end{cases}$ 代入椭圆方程得 $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1(x>1,y>2)$

(2) 因为 $|\overrightarrow{OM}|^2=x^2+y^2$，$y^2=\frac{4}{1-\frac{1}{x^2}}=4+\frac{4}{x^2-1}$，所以 $|\overrightarrow{OM}|^2=x^2-1+\frac{4}{x^2-1}+5\geqslant4+5=9$，当且仅当 $x^2-1=\frac{4}{x^2-1}$，即 $x=\sqrt{3}$ 时，上式取等号，故 $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值为 3

2. (1) $A(-1,0)$，$B(1,4)$　(2) $(x-8)^2+(y+2)^2=9$　提示：(2) 设 $P(x,y)$，由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4$，得点 P 轨迹方程为 $x^2+(y-2)^2=3^2$，其圆心 $C(0,2)$ 关于直线 $l:y=2(x-4)$ 的对称点为 $C'(8,-2)$，于是可得点 P 关于直线 l 的对称点

Q 的轨迹方程

3. 存在，$x=\frac{\pi}{6}$

4. 2　提示：t 时刻时点 P 位置为$(-1+t,2+t)$，点 Q 位置为$(-2+3t,-1+2t)$

第三篇

应用篇

通过向量运算来求解或证明问题的方法,我们称之为向量法.

利用向量的方法可以解决平几、代数、三角、解几、立几中的有关问题,且解决起来简单、明了.

用向量方法解决问题的一般程序是:

1. 构设必要的、足够的基本向量,在很多情形下必须建立(平面或空间的)直角坐标系.

2. 将已知条件和所求结论中的相关元素用向量形式表示.

3. 进行必要的向量运算,结合相关的其他知识使问题得到解决.

4. 最后把算得的结果转化为所要求证的结论.

第七章 平面向量的应用

第一节 向量法解平面几何题

平面几何中有关线段长、平行、垂直、夹角、三线共点、三点共线等类型的问题，若用向量法来证明(或解)，常较为简捷，其优点是将问题解决程序化.

用平面向量解决平几问题的步骤：

(1)用向量表示问题中涉及的几何元素，将平几问题转化为向量问题；

(2)根据已知和所求进行必要的向量运算；

(3)把运算结果“翻译”成几何元素之间的关系.

用向量法证明几何问题通常有两个途径：

(1)建立直角坐标系，利用向量的坐标运算解题；

(2)不建立直角坐标系，取一组基底，用其表示其他向量，再利用向量的运算解题.

利用向量解决平几问题时，要注意紧密结合平面图形中的已知和待求证的位置关系和数量关系，结合利用平面向量运算的几何意义(三角形法则、平行四边形法则)和运算性质以及几何图形的一些性质来解题.

一、解法指导

(一)有关线段长、角度、垂直等问题的证法

有关线段长、角度、垂直等问题的证法可考虑利用向量的数量积或其坐标表示(这时常须建立直角坐标系)来帮助解题. 求线段长常转化为求相对应向量的模；求角常利用夹角公式：$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$；证垂直常转化为证 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 常用向量知识有：

(1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$，$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}=(x_1,y_2)$与$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$共线$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$(或 $x_1y_2-x_2y_1=0$).

(2)定比分点向量公式：设 P 为 $\overline{P_1P_2}$ 的分点，且 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 的比 $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\lambda(\lambda\in\mathbf{R})$，$O$ 为平面内任一点，则有 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}$.

注意 (1)向量的夹角与所求角可能相等，也可能互补.

(2)证垂直时，尽量用坐标运算，它比用斜率简单得多(可免去对斜率是否存在的讨论).

例1 如图7.1，四边形 $ABCD$ 是正方形，$BE/\!/AC$，$AC=CE$，EC 的延长线交 BA 的延长线于点 F，求证：$AF=AE$.

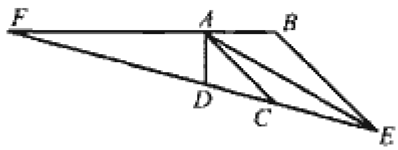


图 7.1

证明 建立平面直角坐标系如图7.2所示，设正方形边长为1，则 $A(-1,1)$，$B(0,1)$，若设 $E(x,y)$，则 $\overrightarrow{BE}=(x,y-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-1)$，又因为 $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{BE}$，所以 $x\cdot(-1)-1\times(y-1)=0$，即 $x+y-1=0$. 又因为 $|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{AC}|$，所以 $x^2+y^2-2=0$，由 $\begin{cases}x^2+y^2-2=0\\x+y-1=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\\y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$(舍)，所以 $E\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$. 又

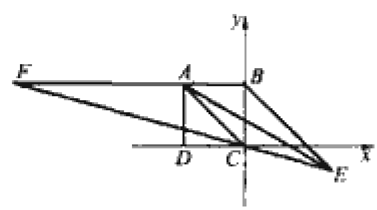


图 7.2

设 $F(x',1)$，由 $\overrightarrow{CF}=(x',1)$ 和 $\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ 共线得 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}x'-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=0$，所以 $x'=-2-\sqrt{3}$，则 $F(-2-\sqrt{3},1)$，所以

$$\overrightarrow{AF}=(-1-\sqrt{3},0),\quad \overrightarrow{AE}=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

则

$$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1+\sqrt{3}=|\overrightarrow{AF}|$$

所以 $AF=AE$.

例2 如图7.3，设 $\triangle ABC$ 是圆 O 的内接正三角形，点 P 是圆 O 上任一点，$PA^2+PB^2+PC^2$ 是否为定值？

解 设圆 O 半径为 r，因为 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}$，所以

$$|\overrightarrow{PA}|^2=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})^2=|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2=2r^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$$

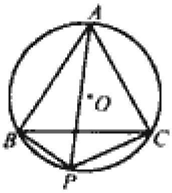


图 7.3

同理

$$|\overrightarrow{PB}|^2=2r^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$$
$$|\overrightarrow{PC}|^2=2r^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$$

所以

$$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2=6r^2-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}$$

而 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以

$$PA^2+PB^2+PC^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2=6r^2\text{(定值)}$$

例 3 如图 7.4，在 $\triangle ABC$ 所在平面内求一点 P，使 $AP^2+BP^2+CP^2$ 最小.

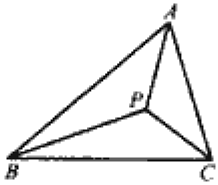


图 7.4

解 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{t}$，则

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{t}-\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{t}-\boldsymbol{b}$$

所以

$$\begin{aligned}AP^2+BP^2+CP^2&=(\overrightarrow{AP})^2+(\overrightarrow{BP})^2+(\overrightarrow{CP})^2=\\&\boldsymbol{t}^2+(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{b})^2=\\&3\boldsymbol{t}^2-2\boldsymbol{t}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=\\&3\left[\boldsymbol{t}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right]^2+\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

因为 $\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 为一常数，所以当 $\boldsymbol{t}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，即点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时，$AP^2+BP^2+CP^2$ 的值最小.

说明 本例的点 P 实质上是平面几何中著名的费马点.

例 4 如图 7.5，已知 $\triangle ABC$ 的两边 b，c 及 $\angle A$，求 $\angle A$ 的平分线 AD 的长.

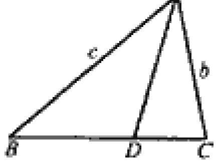


图 7.5

解 因为 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$，即 $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}=\frac{c}{b}$，所以

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b}\overrightarrow{AC}}{1+\frac{c}{b}}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$$

则

$$|\overrightarrow{AD}|^2=\overrightarrow{AD}^2=\frac{b^2\overrightarrow{AB}^2+c^2\overrightarrow{AC}^2+2bc\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{(b+c)^2}=$$

$$\frac{2b^2c^2+2b^2c^2\cos\angle BAC}{(b+c)^2}=\frac{2b^2c^2(1+\cos\angle BAC)}{(b+c)^2}=$$

$$\frac{4b^2c^2\cos^2\frac{\angle BAC}{2}}{(b+c)^2}$$

即

$$|\overrightarrow{AD}|=\frac{2bc\cos\frac{\angle BAC}{2}}{b+c}$$

*例 5 如图 7.6，E,F 分别是▱$ABCD$ 的边 AD，CD 的中点，BE、BF 与对角线 AC 分别交于点 R 和点 T，求证：$AR=RT=TC=\frac{1}{3}AC$.

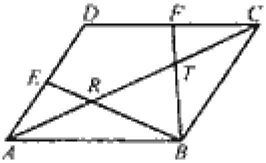


图 7.6

证明 因为 $\overrightarrow{AR}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线，$\overrightarrow{AC}\neq\mathbf{0}$，所以 $\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，即

$$\overrightarrow{AR}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}) \quad ①$$

又因为点 E 是 AD 中点，$\overrightarrow{ER}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 共线，$\overrightarrow{EB}\neq\mathbf{0}$，所以

$$\overrightarrow{ER}=\mu\overrightarrow{EB}=\mu(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE})=\mu(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) \quad (\mu\in\mathbf{R})$$

在△AER 中

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\mu(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) \quad ②$$

由式①和式②得

$$(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}+\left(\lambda+\frac{\mu-1}{2}\right)\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$$

因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 不共线，所以 $\begin{cases}\lambda-\mu=0\\ \lambda+\frac{\mu-1}{2}=0\end{cases}$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，所以 $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $AR=\frac{1}{3}AC$. 同理可证，$\overrightarrow{CT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$，所以 $TC=\frac{1}{3}AC$. 因此 $AR=RT=TC=\frac{1}{3}AC$.

例 6 在正方形 $ABCD$ 的一边 CD 上取一点 E，使 $BC+CE=AE$，若点 H 为 CD 的中点，求证：$\angle BAE=2\angle HAD$.

证明 如图 7.7，建立平面直角坐标系，设正方形边长为 1，则 $D(1,0)$，$C(1,1)$，$B(0,1)$，$H(1,\frac{1}{2})$，设 $E(1,y)$，则

$$|AE|=\sqrt{1+y^2}$$

又

$$AE = BC + CE = 1 + (1 - y) = 2 - y$$

解$\sqrt{1+y^2} = 2 - y$，得 $y = \frac{3}{4}$，因为

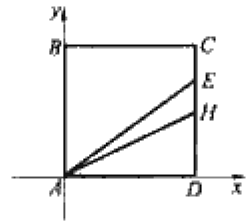


图 7.7

$$\cos\angle HAD = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AH}|} = \frac{(1,0)\cdot(1,\frac{1}{2})}{1\times\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\angle BAE = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|} = \frac{(0,1)\cdot(1,\frac{3}{4})}{1\times\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

又　$\cos 2\angle HAD = 2\cos^2\angle HAD - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} = \cos\angle BAE$

由于 $2\angle HAD$，$\angle BAE$ 均是锐角，所以$\angle BAE = 2\angle HAD$.

例 7　求等腰直角三角形中两直角边上的中线所成的钝角.

解一　如图 7.8，AE，BD 分别为等腰直角△ABC 两直角边 BC，AC 上的中线，设$\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = m$. 则

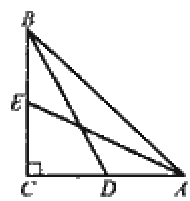


图 7.8

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\right) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2 + \frac{5}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2 =$$

$$-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2 = -m^2$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{|AC|^2 + |CE|^2} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}m$$

同理 $|\overrightarrow{BD}| = \frac{\sqrt{5}}{2}m$. 设$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{BD}$的夹角为 θ，则

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{BD}|} = \frac{-m^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}m\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}m} = -\frac{4}{5}$$

所以 $\theta = \pi - \arccos\frac{4}{5}$.

解二　以点 C 为坐标原点，CA 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴建立直角坐标系，如图 7.9 所示. 设 $A(m,0)$，$B(0,m)$，$D\left(\frac{m}{2},0\right)$，$E\left(0,\frac{m}{2}\right)$. 因

为

$$\overrightarrow{AE}=\left(-m,\frac{m}{2}\right),\quad \overrightarrow{BD}=\left(\frac{m}{2},-m\right)$$

所以

$$\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD}>=\frac{-\frac{m^2}{2}-\frac{m^2}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}m\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}m}=-\frac{4}{5}$$

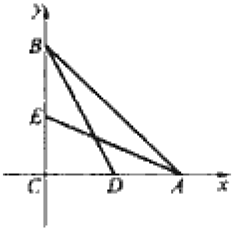


图 7.9

则$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{BD}$的夹角为 $\pi-\arccos\frac{4}{5}$.

例 8 如图 7.10，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 P 是对角线 DB 上的一点，四边形 $PFCE$ 是矩形. 求证：(1) $PA=EF$；(2) $PA\perp EF$.

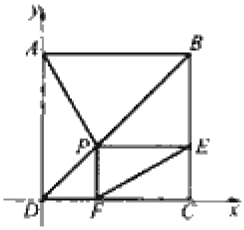


图 7.10

证明 以点 D 为坐标原点，DC 所在直线为 x 轴，DA 所在直线为 y 轴建立直角坐标系. 设正方形的边长为 1，$|DP|=\lambda$，则 $A(0,1)$，$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$，$E\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$，$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,0\right)$. 于是

$$\overrightarrow{PA}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right),\quad \overrightarrow{EF}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$$

(1)因为

$$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)^2}=\sqrt{\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1}$$

$$|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-1\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)^2}=\sqrt{\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1}$$

所以$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{EF}|$，即 $PA=EF$.

(2)因为

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-1\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)=$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-1+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)=0$$

所以$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{EF}$，即 $PA\perp EF$.

例 9 试证：等腰三角形底边上的中线是底边上的高和中垂线，又是顶角平分线.

证明 如图 7.11，$AB=AC$，点 D 为 BC 的中点，记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,\quad \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

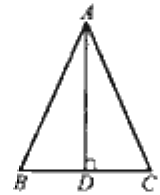


图 7.11

因为

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2)=0$$

所以$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $AD\perp BC$.

由于 AD 为底边上的中线和高线，所以 AD 为底边的中垂线. 又

$$\cos<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{a}>=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{a}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot\boldsymbol{a}}=\frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{a}|}=\frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{ba})}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{a}|}$$

同理

$$\cos<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{b}>=\frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{b}|}$$

因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，则 $\cos<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{a}>=\cos<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{b}>$，由于$<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{a}>$，$<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{b}>$必为锐角，所以$<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{a}>=<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{b}>$，即$\angle DAB=\angle DAC$. 可见 AD 又是顶角 A 的平分线.

例 10　如图 7.12，已知锐角$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，点 M 为 BC 边的中点，由顶点 A 作 $AD\perp BC$，并在 AD 上取一点 H，使 $AH=2OM$，又 H，O 在直线 BC 的同一侧. 求证：$BH\perp AC$，$CH\perp AB$.

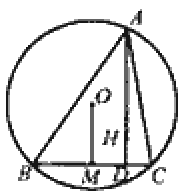


图 7.12

证明　设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，因为点 M 为 BC 中点，所以

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

又 $AH=2OM$，H 与 O 在 BC 同侧，$AD\perp BC$，$OM\perp BC$，所以$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$，则

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\boldsymbol{a}+2\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

所以

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH}=-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$$

又

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$$

所以

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}|^2$$

由于 O 为$\triangle ABC$ 外接圆的圆心，所以 $OA=OB=OC$，即$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，所

以 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$，即 $BH\perp AC$. 同理 $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$，即 $CH\perp AB$.

（二）有关线段平行、三点共线问题的证法

1. 可考虑利用向量共线定理（$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$）来帮助解题.

注意 （1）向量平行与直线平行是有区别的. 因此证两线段平行时还须说明这两线段不在同一条直线上. 证题时，首先要选择基底，并设法将有关向量用基底表示出来，再判断相应的向量是否共线.

（2）说明三点共线时还须说明两向量有公共点.

2. 证三点共线时也可利用如下的定理来帮助解题.

定理一 已知三点 A,B,C，若有 $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$，且 $\lambda+\mu=1$，则 A,B,C 三点共线，反之也成立.

定理二 已知三点 A,B,C，如果它们对应的向量分别是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，那么这三点位于同一条直线上的充要条件是存在三个非零常数 α,β,γ，使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，其中 $\alpha+\beta+\gamma=0$.

定理三 若三个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{c}=\dfrac{\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda}$（$\lambda\in\mathbf{R}$），则三个向量（起点均为原点）的终点共线.

例 11 试证梯形中位线定理.

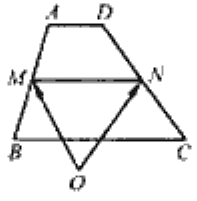


图 7.13

证一 如图 7.13，MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$$

因为 $AD/\!/BC$，可设 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AD}$，则

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\lambda+1)\overrightarrow{AD}$$

所以 $\overrightarrow{MN}/\!/\overrightarrow{AD}$.

$$|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}(\lambda+1)\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\lambda|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{AD}|)=\frac{1}{2}(\lambda|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AD}|)$$

即 $$MN/\!/AD/\!/BC,\quad MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$$

证二

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA})=$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

以下同证一.

证三

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN},\quad \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$$

两式相加得

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}(\text{因为}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\mathbf{0},\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}=\mathbf{0})$$

所以
$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

证四　任取一点 O，作 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$，则

$$|\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\quad \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{PC})$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=$$

$$\frac{1}{2}[(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})]$$

例 12　如图 7.14，$ABCD$ 是平行四边形，EF // AB，AE 与 BF，DE 与 CF 分别相交于点 N 和点 M，求证：MN // AD.

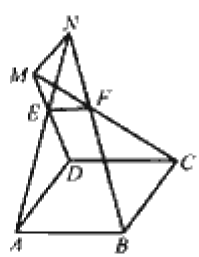


图 7.14

证明　因为 EF // AB，所以 $\triangle NEF \backsim \triangle NAB$. 设 $\overrightarrow{AB}=\lambda'\overrightarrow{EF}(\lambda'\neq 1)$，则 $\frac{AN}{EN}=\lambda'$，所以

$$\frac{AN-EN}{EN}=\frac{AE}{EN}=\lambda'-1$$

则

$$\overrightarrow{AE}=(\lambda'-1)\overrightarrow{EN}$$

同理由 EF // DC，得 $\overrightarrow{DE}=(\lambda'-1)\overrightarrow{EM}$. 于是

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}=(\lambda'-1)\overrightarrow{EN}-(\lambda'-1)\overrightarrow{EM}=(\lambda-1)(\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{EM})=(\lambda'-1)\overrightarrow{MN}$$

令 $\lambda=\lambda'-1$，则 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{MN}(\lambda\neq 0)$，所以 MN // AD.

例 13　如图 7.15，A，B 分别为两定直线 Ax，By 上的定点，P，R 为射线 AX 上两点，Q，S 为射线 By 上两点，$\frac{AP}{BQ}=\frac{AR}{BS}$ 为定比，M，N，T 分别为线段 AB，PQ，RS 上的点，$\frac{AM}{MB}=\frac{PN}{NQ}=\frac{RT}{TS}$ 为另一定比. 问：M，N，T 三点的位置如何？证明你的结论.

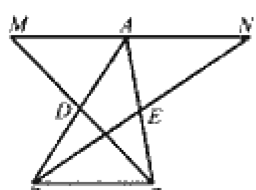


图 7.15

证明　设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AR}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AS}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AR}$，则

$$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RT}=-m\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{b}+m\overrightarrow{RS}=$$

$$-m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(1-m)\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}=-m\boldsymbol{a}+n\overrightarrow{AR}+m\overrightarrow{PQ}=$$
$$-m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+m(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ})=$$
$$-m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+m(-n\overrightarrow{AR}+\boldsymbol{a}+n\overrightarrow{BS})=$$
$$-m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-mn\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{a}+mn(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=$$
$$n[m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(1-m)\boldsymbol{b}]=n\overrightarrow{MT}$$

所以 M,N,T 三点共线.

例 14 如图 7.16,已知点 D,E 为$\triangle ABC$ 的边 AB,AC 的中点,延长 CD 至点 M,使 $DM=CD$,延长 BE 至点 N,使 $BE=EN$,求证:M,A,N 三点共线.

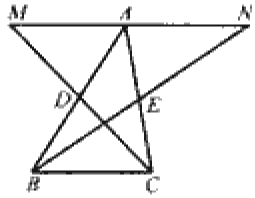


图 7.16

证一 在$\triangle AMC$ 中,点 D 为 MC 中点,所以$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}$,又因为点 D 为 AB 中点,所以

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$$

同理可证

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$$

所以$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AN}$,$\overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AN}$.又因为 $AM\cap AN=A$,所以$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{AN}$所在直线重合,则 A,M,N 三点共线.

证二 设点 A,B,C,N,M 对应的向量分别为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$,则

$$\boldsymbol{f}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b} \qquad ①$$

又因为

$$\boldsymbol{g}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} \qquad ②$$

由① + ②得

$$\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}-2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

且 $1+1-2=0$,所以 N,M,A 三点共线.

(三)有关线段比值问题的证法

有关线段比值问题的证法可考虑利用定比分点坐标公式或平面向量共线的基本定理来帮助解题.解题时常将一个向量用两种不同的表示方法来表示(基底要一样),然后根据向量表示的唯一性得出方程组,解方程组即可求得参数值.

例 15 在等腰直角$\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 是直角,点 D 是 BC 的中点,点 E 在线段 AB 上,且 $AD\perp CE$,试求$\dfrac{AE}{EB}$的值.

解 以点 C 为坐标原点建立直角坐标系，如图 7.17所示，设 $A(2a,0)$，$B(0,2a)$，则 $D(0,a)$，$\overrightarrow{AD}=(-2a,a)$. 因为 A，E，B 三点共线，可设 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{EB}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，$E(x,y)$，由定比分点坐标公式得 $\begin{cases}x=\dfrac{2a}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{2a\lambda}{1+\lambda}\end{cases}$，即 $E\left(\dfrac{2a}{1+\lambda},\dfrac{2a\lambda}{1+\lambda}\right)$，所以 $\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{2a}{1+\lambda},\dfrac{2a\lambda}{1+\lambda}\right)$. 因为 $AD\perp CE$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，即

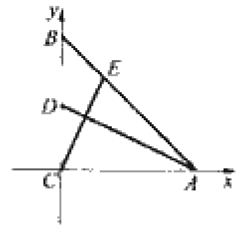


图 7.17

$$-2a\cdot\frac{2a}{1+\lambda}+a\cdot\frac{2a\lambda}{1+\lambda}=0$$

解得 $\lambda=2$，所以 $\dfrac{AE}{EB}=2$.

例 16 如图 7.18，经过△ABC 的重心 G 作直线交 AB 于点 M，交 AC 于点 N，已知 $AM=4MB$，求 $AN:NC$ 的值.

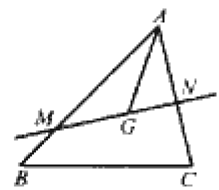


图 7.18

解 设 $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AN}$，因为 G 是△ABC 的重心，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$，又由 $AM=4MB$ 可知 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. 代入得

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}t\overrightarrow{AN}$$

由于 G，M，N 三点共线，所以 $\dfrac{5}{12}+\dfrac{t}{3}=1$，则 $t=\dfrac{7}{4}$，即 $AC=\dfrac{7}{4}AN$，所以 $AN:NC=4:3$.

例 17 如图 7.19，在△ABC 中，点 M 是 BC 的中点，点 N 在边 AC 上，且 $AN=2NC$，AM 与 BN 相交于点 P，求 $AP:PM$ 的值.

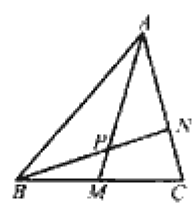


图 7.19

解 设 $\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{e}_2$，则

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1,\quad \overrightarrow{BN}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$$

因为 A，P，M 和 B，P，N 分别共线，所以存在实数 λ，μ，使

$$\overrightarrow{NP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda\boldsymbol{e}_1-3\lambda\boldsymbol{e}_2,\quad \overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$$

故

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2$$

而

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_1$$

由基本定理得$\begin{cases}\lambda+2\mu=2\\3\lambda+\mu=3\end{cases}$,解得$\begin{cases}\lambda=\dfrac{4}{5}\\\mu=\dfrac{3}{5}\end{cases}$,故$\overrightarrow{AP}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AM}$,即 $AP:PM=4:1$.

(四)三线共点问题的证法

1. 设其中两条相交直线于某一点,再证第三条直线也经过这一点.

2. 设直线 l_1 与直线 l_2 相交于点 P_1,直线 l_1 与直线 l_3 相交于点 P_2,证明点 P_1 与点 P_2 重合.

例 18 求证$\triangle ABC$ 的三条高交于一点.

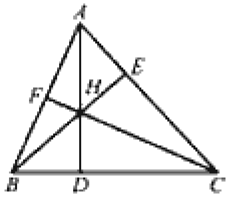


图 7.20

证一 如图 7.20,已知 AD,BE,CF 是$\triangle ABC$ 的三条高.设 BE,CF 交于点 H,且令$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AH}=\boldsymbol{h}$,于是

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{CH}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$$

因为$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$,所以

$$(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0,\quad (\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0$$

则

$$(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$$

所以$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$,则 AH 与 AD 应重合,所以 AD,BE,CF 相交于一点.

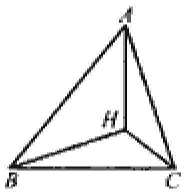


图 7.21

证二 如图 7.21,设点 H 为$\triangle ABC$ 内一点,令$\overrightarrow{HA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{HB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{HC}=\boldsymbol{c}$,则

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$$

当$\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{CA}$时,有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0,\quad \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$$

两式相加得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$$

即$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$,亦即$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{HC}=0$,所以$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{HC}$,即点 H 为三条高线的交点.

例 19 证明三角形的三条中线共点.

证明 如图 7.22,设 AD,BE,CF 分别是 BC,AC,AB 的中线,设$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,则

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

设 AD 与 BE 相交于点 G_1，并设 $\overrightarrow{AG_1}=\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BG_1}=\mu\overrightarrow{BE}$，则

$$\overrightarrow{AG_1}=\lambda\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{BG_1}=\mu\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)=\frac{\mu}{2}\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}$$

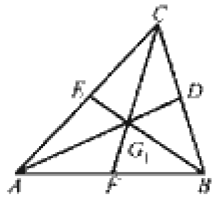


图 7.22

又因为

$$\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG_1}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\frac{\mu}{2}\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}=\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\boldsymbol{a}+(1-\mu)\boldsymbol{b}$$

所以 $\begin{cases}-\lambda=\dfrac{\mu}{2}-1\\ \dfrac{\lambda}{2}=1-\mu\end{cases}$，解得 $\lambda=\mu=\dfrac{2}{3}$，所以 $\overrightarrow{AG_1}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. 设 AD 与 CF 相交于点 G_2，同理可证得 $\overrightarrow{AG_2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，所以点 G_1 与点 G_2 重合，即 AD，BE，CF 相交于同一点.

（五）三角形重心坐标公式的应用

在△ABC 中，若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则重心 G 的坐标 (x_G,y_G) 为 $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\\ y_G=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\end{cases}$.

例 20　如图 7.23，已知在△ABC 的边上有做匀速运动的三个点 D，E，F，在时刻 $t=0$ 时，它们分别从点 A，B，C 出发，各自以一定的速度分别向点 B，C，A 前进，在时刻 $t=1$ 时，它们同时分别到达点 B，C，A. 试证明：在运动的过程中，△DEF 的重心不变.

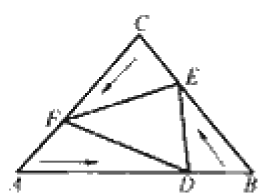


图 7.23

证明　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，△DEF 的重心 $G(x_0,y_0)$，由题意知，在同一时刻 t，D，E，F 分 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ 所成的比相同，即设为 λ，因为从 D，E，F 分别运动到 B，C，A 需时 $1-t$，所以

$$\lambda=\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{t}{1-t}$$

所以

$$x_D=\frac{x_1+\dfrac{t}{1-t}x_2}{1+\dfrac{t}{1-t}}=(1-t)x_1+tx_2,\quad y_D=(1-t)y_1+ty_2$$

$$x_E=(1-t)x_2+tx_3,\quad y_E=(1-t)y_2+ty_3$$
$$x_F=(1-t)x_3+tx_1,\quad y_F=(1-t)y_3+ty_1$$

则

$$x_0=\frac{1}{3}[(1-t)x_1+tx_2+(1-t)x_2+tx_3+(1-t)x_3+tx_1]=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$$

同理

$$y_0=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

由于 x_0,y_0 均与时间 t 无关,说明在运动的过程中,△*DEF* 的重心不变.

二、走进考场 11

1. 已知 Rt△*ABC*,∠*C* = 90°,*AC* = *m*,*BC* = *n*,若点 *E* 为 *CD* 的中点,联结 *AE* 并延长交 *BC* 于点 *F*,求 *AF* 的长度.(用 *m*,*n* 表示)

2. 证明圆幂定理.已知:如图 7.24,从圆(*O*,*R*)外一点 *P* 作该圆的割线交圆于 *A*,*B* 两点,求证:$PA\cdot PB=PO^2-R^2$.

3. 如图 7.25,在等腰 Rt△*ABC* 中,∠*C* = 90°,|*CA*| = |*CB*| = 2*a*,点 *M* 为 *CA* 的中点,*CD*⊥*MB* 交 *AB* 于点 *D*,求证:∠*BMC* = ∠*DMA*.

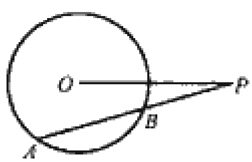


图 7.24

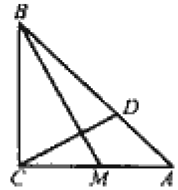


图 7.25

4. 在直角梯形 *ABCD* 中,已知 *AB*∥*CD*,∠*CDA* = ∠*DAB* = 90°,$CD=DA=\frac{1}{2}AB$,证明:*AC*⊥*BC*.

5. 如图 7.26,已知在△*ABC* 的两边 *AB*,*AC* 上分别向形外作正方形 *ABDE*,*ACGF*,点 *M* 为 *BC* 的中点,求证:*AM*⊥*EF*.

6. 如图 7.27,已知在梯形 *ABCD* 中,*AB*∥*DC*,对角线 *AC*,*BD* 的中点分别为点 *M*,*N*,求证:*MN*∥*AB*∥*DC*,且 $MN=\frac{1}{2}(AB-DC)$.

7. (1979 年高考题)如图 7.28,在 Rt△*ABC* 中,*CD* 是斜边 *AB* 上的高,*DE* 是△*CAD* 斜边 *AC* 上的高,*DF* 是△*BDC* 斜边 *BC* 上的高,求证:$\frac{AE}{BF}=\frac{AC^3}{BC^3}$.

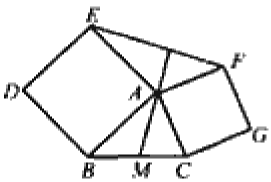


图 7.26

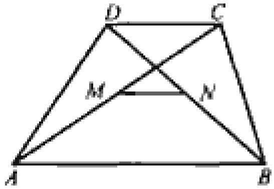


图 7.27

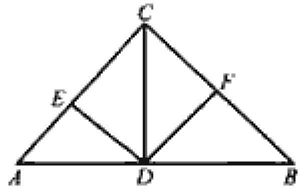


图 7.28

8. 如图 7.29，在四边形 $ABCD$ 的边 AD 上取点 E,F，使 $AE=EF=FD=\frac{1}{3}AD$. 在边 BC 上取点 G,H，使 $BG=GH=HC=\frac{1}{3}BC$，线段 AB,EG,FH,DC 的中点分别为点 M,P,Q,N. 求证：M,P,Q,N 四点在一条直线上.

9. 如图 7.30，在四边形 $ABCD$ 中，点 P,Q 分别为对角线 AC,BD 的中点，点 E,G,F,H 分别为 AD,AB,BC,CD 的中点，求证 EF,GH,PQ 的中点重合.

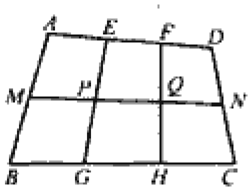


图 7.29

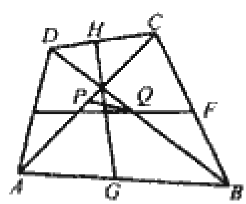


图 7.30

三、答案与提示

1. $\frac{1}{3}\sqrt{n^2+9m^2}$ 提示：以 C 为坐标原点，CB,CA 所在直线分别为 x 轴，y 轴建立平面直角坐标系，设 $F(x,0)$，则 $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{n}{4},-\frac{3}{4}m\right)$，$\overrightarrow{AF}=(x,-m)$. 因为 A,E,F 三点共线，所以 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AE}$，即 $(x,-m)=\lambda\left(\frac{n}{4},-\frac{3}{4}m\right)$，解得 $x=\frac{n}{3}$

2. 提示：过点 A 作圆 O 和的直径 AT，联结 BT，则 $BT\perp PA$，由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PT}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OT})=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OA}^2=PO^2-R^2$，又 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PT}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PT}|\cos<\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PT}>=PA\cdot PB$，所以 $PA\cdot PB=PO^2-R^2$

3. 提示：取 C 为坐标原点，直线 CA,CB 分别为 x 轴，y 轴建立直角坐标系，设 $D(x_1,y_1)$，则 $x_1+y_1=2a$ ①，由 $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{MB}=0$，得 $x_1=2y_1$ ②，于是

$D\left(\frac{4a}{3},\frac{2a}{3}\right)$，$\cos\angle BMC=\frac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}}{|\overrightarrow{MB}||\overrightarrow{MC}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\angle DMA=\frac{1}{\sqrt{5}}$

4. 提示：以 A 为坐标原点，AB，AD 所在直线分别为 x 轴，y 轴建立平面直角坐标系设，$CD=DA=1$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

5. 提示：设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{d}$，则 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$。设 $\angle BAC=\theta$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}[|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{d}|\cos(\theta+\frac{\pi}{2})+0-0-|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\pi-\theta+\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{2}(-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta+|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\theta)=0$（因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$）

6. 提示：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$①；$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}$②，①+②得 $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{DN}$，而 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{DN}=\mathbf{0}$，所以 $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}$。因为 $AB\,/\!/\,DC$，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，则 $\overrightarrow{DC}=\lambda\boldsymbol{a}\ (\lambda>0)$，所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(1-\lambda)\boldsymbol{a}$，则 $\overrightarrow{MN}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}|$，因为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$ 同向平行，所以 $MN=\frac{1}{2}(AB-CD)$

7. 提示：设 $\overrightarrow{EA}=\lambda\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{FB}=\mu\overrightarrow{CB}$，则有 $\overrightarrow{CE}=(1-\lambda)\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CF}=(1-\mu)\overrightarrow{CB}$，因为 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}$，所以 $\overrightarrow{CD}=(1-\lambda)\overrightarrow{CA}+(1-\mu)\overrightarrow{CB}$，因为 A，D，B 三点共线，所以 $(1-\lambda)+(1-\mu)=1$，所以 $\lambda+\mu=1$，所以 $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，而 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=[(1-\lambda)\overrightarrow{CA}+(1-\mu)\overrightarrow{CB}](\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=(1-\lambda)\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}-(1-\lambda)\overrightarrow{CA}^2+(1-\mu)\overrightarrow{CB}^2-(1-\mu)\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$，而 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$，所以 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=-(1-\lambda)\overrightarrow{CA}^2+(1-\mu)\overrightarrow{CB}^2=-\mu|\overrightarrow{CA}|^2+\lambda|\overrightarrow{CB}|^2=-\mu CA^2+\lambda CB^2=0$，则 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{AC^2}{BC^2}$，所以 $\frac{AE}{BF}=\frac{\lambda AC}{\mu BC}=\frac{AC^3}{BC^3}$

8. 提示：$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MG})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BG})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})$，因为 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\mathbf{0}$，所以 $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$，同理可得 $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$，所以 $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MP}$，则 M，P，Q，N 四点共线

9. 提示：设 O 为平面上任一点，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，则 $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d})$，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})$，又设 EF，GH，PQ 的中点分别为点 M_1，M_2，M_3，则 $\overrightarrow{OM_1}=$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$，$\overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH})=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$. 从而 M_1,M_2,M_3 重合即 EF,GH,PQ 的中点重合

第二节 向量法解代数题与向量平移

由于向量的模、夹角及其运算等概念与代数、三角中的相关知识密切相关，因此向量方法在代数、三角中的应用也十分广泛. 用向量法来解代数、三角问题时，常根据题设条件联想其几何意义，或构造合适的向量，从而把代数式、三角中的问题转化为向量问题来处理. 在求解过程中还常要结合相关图形进行分析和判断.

一、解法指导

(一)向量法在代数中的应用

1. 题型：求函数的最值(或值域)，证明等式或不等式，解方程等.

2. 凡题目中有出现两数平方和、两数乘积与另两数乘积之和这样的形式结构时，均可考虑利用向量法来解题.

3. 涉及的向量知识.

(1)向量数量积的性质：①$<a,b>=\theta$，则 $a\cdot b=|a||b|\cos\theta\leqslant|a|\cdot|b|$(当 a,b 同向时取等号)；②$|a\cdot b|\leqslant|a||b|$(当 a,b 共线时取等号)；③$(a\cdot b)^2\leqslant|a|^2|b|^2$(当 a,b 共线时取等号)；④$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}$，由 $|\cos\theta|\leqslant1$ 得 $-1\leqslant\frac{a\cdot b}{|a||b|}\leqslant1$.

(2)向量模的性质：$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$(当 a,b 同向时，$|a+b|=|a|+|b|$，$|a-b|=||a|-|b||$；当 a,b 反向时，$|a+b|=||a|-|b||$，$|a-b|=|a|+|b|$).

4. 构造向量的方法.

(1)若题目中有出现 x^2+y^2 或 $\sqrt{x^2+y^2}$(x^2+bx+c 或 $\sqrt{x^2+bx+c}$，其中 $b^2<4c$，可通过配方化为这种形式)时，可设 $u=(x,y)$，则 $x^2+y^2=|u|^2$ 或 $\sqrt{x^2+y^2}=|u|$.

(2)若题目中有出现 $ax+by$ 时，可设 $u=(a,b)$，$v=(x,y)$或 $u=(a,$

$y)$，$\boldsymbol{v}=(x,b)$，则 $ax+by=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$，可考虑利用向量数量积的性质帮助解题.

(3)在题目中出现数量积形式时，有时依题设出一个向量 $\boldsymbol{u}$ 之后，可依据要得到的向量数量积 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 的形式，去凑出另一个向量 $\boldsymbol{v}$.

注意 (1)上述几种形式中的 x,y,a,b 可以是数，也可以是式，$ax+by$ 中的 a,b 可以为1(要特别注意这种特殊形式).

(2)有些题目中虽未直接给出这几种形态，但将其中的代数式变形后仍可变成这几种形式. 同学们应掌握这种变形技巧. 如：由 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 得$(x-1)^2+(y+2)^2=1$；$a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$，均可看成 x^2+y^2 的形式；又如$\sqrt{x^2-8x+20}=\sqrt{(x-4)^2+2^2}$，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}$ 均可看成$\sqrt{x^2+y^2}$的形式. 再如：$\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-3x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{6x-3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{10-6x}$(这种变形方法称为"配凑法"，即使得两根式内 x 的系数互为相反数，这种变形的目的是使 $\boldsymbol{v}=(\sqrt{6x-3},\sqrt{10-6x})$的模是常数)，$x\sqrt{14-3y^2}-y\sqrt{21-3x^2}$，$\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=1\times\sqrt{x+1}+1\times\sqrt{y-2}$，$a^3+b^3=a\cdot a^2+b\cdot b^2$ 等均可看成 $ax+by$ 的形式.

5. 各种题型的解法.

(1)求最值(或值域).

①形如 $y=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}\,(ac<0)$的函数都可以通过适当的配凑或分拆构造出两个向量的数量积的形式.

②形如 $y=\sqrt{x^2+ax+b}\pm\sqrt{x^2+cx+d}\,(a^2<4b,c^2<4d)$的函数都可以按新给代数式构造出两个向量(两向量的和或差的坐标须是常数).

③某些含有乘方之和或乘积之和的式子的条件最值问题，应用向量法解题有其独到之处.(应注意巧妙利用限制条件).

④构造向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 时，应使$|\boldsymbol{u}|$，$|\boldsymbol{v}|$，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 三个量中的两个量为常数，第三个量应与所求式的形式一样或接近，以便利用向量数量积的性质来帮助解题.

例1 求 $y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-3x}$的最大值.

解 (配凑法)原函数定义域为$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{3}\right]$原函数关系可变形为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{6x-3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{10-6x}$$

于是可令 $\boldsymbol{u}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\boldsymbol{v}=(\sqrt{6x-3},\sqrt{10-6x})$，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=y$，$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{\dfrac{6}{5}}$，$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{7}$，由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$得 $y\leqslant\sqrt{\dfrac{5}{6}}\cdot\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{210}}{6}$，当且仅当 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同向，即

$$\frac{\sqrt{6-3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{10-6x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}>0,\quad \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{10-6x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{6x-3}$$

解得 $x=\frac{29}{30}\in[\frac{1}{2},\frac{5}{3}]$时，$y_{max}=\frac{\sqrt{210}}{6}$.

例 2 求函数 $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$的值域.

解 $y=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，构造向量 $\boldsymbol{a}=\left(x+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(x-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $y=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$. 因为 a,b 不共线，所以 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则 $-1<|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<1$，即 $-1<y<1$，所以所求函数值域为 $(-1,1)$.

例 3 设 $m,n\in\mathbf{R}$，求 $S=\sqrt{m^2+n^2-2m-2n+2}+\sqrt{m^2+n^2-4m+4}$的最小值，并指出此时 m、n 应满足的条件.

解
$$S=\sqrt{m^2+n^2-2m-2n+2}+\sqrt{m^2+n^2-4+4}$$
可化为
$$S=\sqrt{(m-1)^2+(1-n)^2}+\sqrt{(2-m)^2+n^2}$$
设 $\boldsymbol{u}=(m-1,1-n)$，$\boldsymbol{v}=(2-m,n)$，则
$$S=|\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|,\quad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(1,1)$$
由
$$|\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|\geqslant|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|=\sqrt{2} \tag{①}$$
当 $\boldsymbol{u}=0$ 或 $\boldsymbol{v}=0$ 时，式①都是成立的，这时
$$m=1,\quad n=1\quad 或\quad m=2,\quad n=2 \tag{②}$$
当 $\boldsymbol{u}\neq0$ 或 $\boldsymbol{v}\neq0$ 时，式①要成立，当且仅当 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同向共线时等号成立. 所以 $\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v}(k>0)$，即
$$\begin{cases}m-1=k(2-m)\\1-n=kn\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m+n-2=0\\(m-1)(2-m)>0\\(1-n)n>0\end{cases}$$
亦即$\begin{cases}1<m<2\\0<n<1\end{cases}$. 综上，$S$ 的最小值是$\sqrt{2}$，此时 m,n 满足的条件是 $m+n-2=0$ $(1\leqslant m\leqslant2)$（或写成 $m+n-2=0(0\leqslant n\leqslant1)$）.

例 4 若$\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=5$，求 $x+y$ 的最小值.

解 构造向量 $\boldsymbol{u}=(\sqrt{x+1},\sqrt{y-2})$，$\boldsymbol{v}=(1,1)$，则
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=5,\quad |\boldsymbol{u}|=\sqrt{x+y-1},\quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{2}$$

由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ 得

$$5\leqslant\sqrt{2}\sqrt{x+y-1}$$

所以

$$x+y\geqslant\frac{27}{2}$$

当且仅当

$$\frac{\sqrt{x+1}}{1}=\frac{\sqrt{y-2}}{1}>0$$

且
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=5$$

即当 $x=\frac{21}{4}$，$y=\frac{23}{4}$ 时，$x+y$ 有最小值为 $\frac{27}{2}$.

例 5 已知，实数 x，y 满足 $x+2y-4=0$，则 x^2+y^2 的取值范围是________.

解 构造向量 $\boldsymbol{u}=(x,y)$，$\boldsymbol{v}=(1,2)$，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=x+2y=4,\quad |\boldsymbol{u}|=\sqrt{x^2+y^2},\quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{5}$$

由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ 得

$$4\leqslant 5\sqrt{x^2+y^2}$$

则

$$x^2+y^2\geqslant\frac{16}{5}$$

上式当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}>0$ 且 $x+2y-4=0$，即 $x=\frac{4}{5}$，$y=\frac{8}{5}$ 时取等号，所以 x^2+y^2 的取值范围是 $[\frac{16}{5},+\infty]$.

例 6 给定正整数 n 和 M，对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$. 试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值.

解
$$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=$$
$$\frac{(n+1)a_{n+1}+a_{2n+1}}{2}=\frac{(n+1)(a_{n+1}+2a_{n+1}-a_1)}{2}=$$
$$\frac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1)$$

设 $\boldsymbol{u}=(a_{n+1},a_1)$，$\boldsymbol{v}=(3,-1)$，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=3a_{n+1}-a_1,\quad |\boldsymbol{u}|=\sqrt{a_{n+1}^2+a_1^2}\leqslant\sqrt{M},\quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{10}$$

由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ 得

$$3a_{n+1}-a_1\leqslant\sqrt{10M}$$

所以

$$S \leqslant \frac{n+1}{2}\sqrt{10M}$$

当且仅当

$$\frac{a_{n+1}}{3} = \frac{a_1}{-1} > 0$$

且

$$a_{n+1}^2 + a_1^2 = M$$

即 $a_1 = -\frac{\sqrt{10M}}{10}$，$d = \frac{2\sqrt{10M}}{5n}$时，$S_{\max} = \frac{n+1}{2}\sqrt{10M}$.

例7 已知 O 为坐标原点，$A(2,1)$，$P(x,y)$满足$\begin{cases} x-4y+3\leqslant 0 \\ 3x+5y\leqslant 25 \\ x-1\geqslant 0 \end{cases}$，则 $|OP|\cos\angle AOP$的最大值等于________.

解 在平面直角坐标系中画出不等式组所表示的可行域，由于

$$|OP|\cos\angle AOP = \frac{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|\cos\angle AOP}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x,y)\cdot(2,1) = \frac{2x+y}{\sqrt{5}}$$

令 $z=2x+y$，由图 7.31 知，当直线经过可行域中的点 M 时，z 取到最大值，由$\begin{cases} x-4y+3=0 \\ 3x+5y=25 \end{cases}$，得 $M(5,2)$，这时 $z=12$，所以 $|OP|\cos\angle AOP$ 的最大值等于$\frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

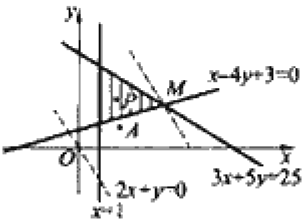


图 7.31

(2)证明等式. 证等式时常用到如下性质.

①若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；又若 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

②若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；又若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$.

例8 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$，求证：$x^2+y^2=1$.

证一 构造向量 $\boldsymbol{u}=(x,\sqrt{1-x^2})$，$\boldsymbol{v}=(\sqrt{1-y^2},y)$，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1,\quad |\boldsymbol{u}|=1,\quad |\boldsymbol{v}|=1$$

所以

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|,\quad |\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{v}|$$

所以 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$，即$\begin{cases}x=\sqrt{1-y^2}\\y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}$，所以 $x^2+y^2=1$.

证二 设 $\boldsymbol{u}=(x,y)$，$\boldsymbol{v}^2=(\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-x^2})$，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1,\quad |\boldsymbol{u}|=\sqrt{x^2+y^2},\quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{2-(x^2+y^2)}$$

由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ 得

$$1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2-(x^2+y^2)}$$

设 $t=x^2+y^2$，得

$$1\leqslant\sqrt{t(2-t)},\quad 1\leqslant 2t-t^2$$
$$t^2-2t+1\leqslant 0,\quad (t-1)^2\leqslant 0,\quad t=1$$

所以

$$x^2+y^2=1$$

(3)证明不等式．对于某些特殊结构(如$\sqrt{x^2+y^2}$，$x_1x_2+y_1y_2$ 形式的式子)的不等式，可巧设向量将某些式子转化成向量的形式，利用向量模的性质或向量数量积的性质来证明，但要注意等号成立的条件．

例 9 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a\pm c)^2+(b\pm d)^2}$.

证明 设 $\boldsymbol{u}=(a,b)$，$\boldsymbol{v}=(c,d)$，则

$$\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v}=(a\pm c,b\pm d),\quad |\boldsymbol{u}|=\sqrt{a^2+b^2},\quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{c^2+d^2}$$

由 $|\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|$，得

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a\pm c)^2+(b\pm d)^2}$$

例 10 设 p,q 都是正实数，r,s 满足 $r^2+s^2=1$，求证：$\sqrt{p^2r^2+q^2s^2}+\sqrt{q^2r^2+p^2s^2}\geqslant p+q$.

证明 设 $\boldsymbol{u}=(pr,qs)$，$\boldsymbol{v}=(qr,ps)$，则

$$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{p^2r^2+q^2s^2},|\boldsymbol{v}|=\sqrt{q^2r^2+p^2s^2}$$
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(r(p+q),s(p+q))$$

由 $|\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|\geqslant|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$ 得

$$\sqrt{p^2r^2+q^2s^2}+\sqrt{q^2r^2+p^2s^2}\geqslant\sqrt{r^2(p+q)^2+s^2(p+q)^2}=\sqrt{(p+q)^2(r^2+s^2)}=p+q$$

例 11 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a+b=1$，求证：$\sqrt{2a+1}+\sqrt{b+\frac{1}{3}}\leqslant\frac{\sqrt{22}}{2}$.

证明　欲证不等式左边可变形为

$$\sqrt{2}\sqrt{a+\frac{1}{2}}+1\sqrt{b+\frac{1}{3}}$$

设 $\boldsymbol{u}=\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}},\sqrt{b+\frac{1}{3}}\right)$，$\boldsymbol{v}=(\sqrt{2},1)$，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sqrt{2a+1}+\sqrt{b+\frac{1}{3}}$$

$$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{a+\frac{1}{2}+b+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{11}{6}},\quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{3}$$

由

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$$

得

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{b+\frac{1}{3}}\leqslant\sqrt{\frac{11}{6}}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

例 12　设 x,y 为正数，存在不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 恒成立，则 a 的取值范围为________.

解　设 $\boldsymbol{u}=(\sqrt{x},\sqrt{y})$，$\boldsymbol{v}=(1,1)$，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sqrt{x}+\sqrt{y},\quad |\boldsymbol{u}|=\sqrt{x+y},\quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{2}$$

由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ 得

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{2}\sqrt{x+y}$$

由已知 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 恒成立，故有 $a\geqslant\sqrt{2}$，所以 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

(4)解方程.

例 13　解方程：$2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{x^2+2x+10}$.

解　原方程可化为

$$\sqrt{(2x)^2+2^2}+\sqrt{(x-1)^2+1^2}=\sqrt{(x+1)^2+3^2}$$

设 $\boldsymbol{u}=(2x,2)$，$\boldsymbol{v}=(x-1,-1)$，则

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=(x+1,3)$$

原方程即

$$|\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$$

上式当且仅当 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 反向时成立，所以

$$\frac{2x}{x-1}=\frac{2}{-1}<0$$

解得 $x=\frac{1}{2}$. 经检验，$x=\frac{1}{2}$ 是原方程的根.

*例 14　求方程 $x\sqrt{14-3y^2}-y\sqrt{21-3x^2}=7\sqrt{2}$的整数解.

解　设 $\boldsymbol{u}=(x,-y)$,$\boldsymbol{v}=(\sqrt{14-3y^2},\sqrt{21-3x^2})$,则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=x\sqrt{14-3y^2}-y\sqrt{21-3x^2}$$

由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$得

$$x\sqrt{14-3y^2}-y\sqrt{21-3x^2}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{35-3x^2-3y^2}$$

原方程要有解,则

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{35-3x^2-3y^2}\geqslant 7\sqrt{2}\\ 14-3y^2\geqslant 0\\ 21-3x^2\geqslant 0\\ x\geqslant 0,y\leqslant 0,x,y\in z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{14}{3}\leqslant x^2+y^2\leqslant 7\\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{7}\\ -\sqrt{\frac{14}{3}}\leqslant y\leqslant 0\end{cases}\qquad (*)$$

在平面直角坐标系中,作出约束条件(*)的可行域,可知可行域内整数点只有两个,即(1,-2),(2,-1).经检验,只有 $x=1,y=-2$ 是原方程的整数解.

(5)其他.

例 15　已知 $a,b\in\mathbf{R}$,$m,n\in\mathbf{R}$,且 $mn\neq 0$,$m^2n^2>a^2m^2+b^2n^2$,令 $M=\sqrt{m^2+n^2}$,$N=a+b$,试比较 M,N 的大小.

解　构造向量 $\boldsymbol{p}=(m,n)$,$\boldsymbol{q}=\left(\frac{b}{m},\frac{a}{n}\right)$,则

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=b+a=N,\quad |\boldsymbol{p}|=\sqrt{m^2+n^2}=M$$

$$|\boldsymbol{q}|=\sqrt{\frac{b^2}{m^2}+\frac{a^2}{n^2}}=\sqrt{\frac{b^2n^2+a^2m^2}{m^2n^2}}<1$$

由 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\leqslant|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|$得

$$N\leqslant M\sqrt{\frac{b^2}{m^2}+\frac{a^2}{n^2}}<M$$

所以 $M>N$.

例 16　设 $a,b\in\mathbf{R}$,$A=\{(x,y)|x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$,且 A,B,C 是直角坐标平面 xOy 内的点集,讨论是否存在 a 和 b,使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 与 $(a,b)\in C$ 能同时成立.

解　此问题等价于是否存在 a 和 b,使得

$$\begin{cases}na+b=3n^2+15 & ①\\ a^2+b^2\leqslant 144 & ②\end{cases}$$

能成立.

设存在 a,b 满足上两式,构造向量 $u=(a,b)$,$v=(n,1)$,则

$$u\cdot v=na+b=3n^2+15,\quad |u|=\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 12,\quad |v|=\sqrt{n^2+1}$$

由 $u\cdot v\leqslant |u||v|$ 得

$$3n^2+15\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{n^2+1}\leqslant 12\sqrt{n^2+1}$$

平方整理得

$$n^4-6n^2+9\leqslant 0,\quad (n^2-3)^2\leqslant 0,\quad n^2=3,\quad n=\pm\sqrt{3}$$

这与 $n\in\mathbf{Z}$ 矛盾,故不存在 a,b 能满足题设的条件.

(二)利用向量平移化简函数解析式

1.图形的平移定义.

设 F 是坐标平面内的一个图形,将 F 上所有点按照同一方向移动同样长度,得到图形 F',我们把这一过程叫图形的平移.

2.图形的平移公式.

设 $P(x,y)$ 是图形 F 上的任意一点,它在平移后图形 F' 上的对应点为 $P'(x',y')$,且设 $\overrightarrow{PP'}$ 的坐标为 (h,k),则 $\begin{cases}x'=x+h\\y'=y+k\end{cases}$.

3.平移公式的应用.

在平移公式中有三个量,即平移前、后点的坐标,平移向量的坐标,知道了其中任意两个量,就可以求出另一个量,即"知二求一".

(1)由旧点坐标 (x,y) 求新点坐标 (x',y'),用公式 $\begin{cases}x'=x+h\\y'=y+k\end{cases}$.

(2)由新点坐标 (x',y') 求旧点坐标 (x,y),用公式变形 $\begin{cases}x=x'-h\\y=y'-k\end{cases}$.

(3)由新、旧两点坐标求平移向量,用公式变形 $\begin{cases}h=x'-x\\k=y'-y\end{cases}$.

例 17 如果点 $P(1,3)$ 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后得到点 $P'(4,1)$,那么点 $Q(2,1)$ 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后的点 Q' 的坐标是________.

解 设平移向量为 $\boldsymbol{a}=(h,k)$,依题设 $\begin{cases}4=1+h\\1=3+k\end{cases}$,所以 $\begin{cases}h=3\\k=-2\end{cases}$,即 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$.设 $Q'(x',y')$,则 $\begin{cases}x'=2+3=5\\y'=1-2=-1\end{cases}$,所以 $Q'(5,-1)$.

4.利用平移化简函数解析式的方法.

平移是研究函数的一种重要方法.在选定的坐标系下,有时图象的函数表达式比较复杂,这时通过平移图象可使其函数表达式变得非常简单.(如形如

$y=ax^2+bx+c$ 与 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}(a\neq0)$的函数).

(1)由旧函数解析式 $y=f(x)$求新解析式.

将$\begin{cases}x=x'-h\\y=y'-k\end{cases}$代入旧解析式中,整理得 $y'=g(x')$,再将 x',y'换成x,y,即得新函数解析式 $y=g(x)=f(x-h)+k$.

(2)由新函数解析式 $y=g(x)$求旧解析式.

将$\begin{cases}x'=x+h\\y'=y+k\end{cases}$代入新解析式中(此时应把 $y=g(x)$看作 $y'=g(x')$),整理即得旧函数解析式 $y=f(x)$.

(3)求平移向量的方法.

①待定系数法:按要求代入平移公式,再依题目要求求出 h,k.

②配凑法:按题目要求进行配凑,对二次函数也可用配凑法来求.

③利用图形的特征对应点(如顶点)的新旧坐标来求.

注意 (1)由于平移图形是指将图形上所有点按照同一方向移动同样长度,所以平移向量可由任意一对对应点来确定.

(2)平移是一种变换,这种变换是保型的,即虽然方程变换了,但曲线的形状不会改变,因此在检验结果的正确性时,通常采用"顺原路返回"的方法,能返回到已知的就正确,否则,得到的结果就是错误的.

例 18 [2008·辽宁文理-(8)]将函数 $y=2^x+1$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移得到函数 $y=2^{x+1}$的图象,则 ( )

A. $\boldsymbol{a}=(-1,-1)$ B. $\boldsymbol{a}=(1,-1)$ C. $\boldsymbol{a}=(1,1)$ D. $\boldsymbol{a}=(-1,1)$

解 设 $M(x,y)$是 $y=2^x+1$ 上的任一点,按照向量 $\boldsymbol{a}=(m,n)$平移后该点在 $y=2^{x+1}$的图象上,且该点坐标变为$(x+m,y+n)$,即 $y+n=2^{x+m+1}$.又因为 $M(x,y)$在 $y=2^x+1$ 上,所以 $2^x+1+n=2^{x+m+1}$,则 $m=-1$,$n=-1$,所以 $\boldsymbol{a}=(-1,-1)$.

例 19 将函数 $y=x^2+6x+1$ 的图象 C 经过怎样的一次平衡,可以得到 $y=x^2$ 的图象.

解一(待定系数法) 设 $P(x,y)$是图象 C 上任一点,按向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$平移后的对应点为 $P'(x',y')$,则

$$\begin{cases}x'=x+h\\y'=y+k\end{cases}$$

将

$$\begin{cases}x=x'-h\\y=y'-k\end{cases}$$

代入

$$y=x^2+6x+1$$

并整理得

$$y'=x'^2+(6-2h)x'+(h^2-6h+1+k)$$

由于它与 $y=x^2$ 是同一函数，所以

$$\begin{cases}6-2h=0\\h^2-6h+1+k=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}h=3\\k=8\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{a}=(3,8)$.

解二　（配凑法）　$y=x^2+6x+1=(x+3)^2-8$

即

$$y+8=(x+3)^2$$

作平移变换$\begin{cases}y+8=y'\\x+3=x'\end{cases}$，即得

$$y'=x'^2$$

可见，按 $\boldsymbol{a}=(3,8)$平移时，可得到 $y=x^2$ 的图象.

解三　$y=x^2+6x+1$ 的图象是抛物线，其顶点 $O'(-3,-8)$. $y=x^2$ 的图象也是抛物线，其顶点 $O(0,0)$. 因此，只要按$\overrightarrow{O'O}=(0+3,0+8)=(3,8)$平移，即可得到 $y=x^2$ 的图象.

例 20　是否存在这样的平移，使抛物线 $y=-x^2$ 平移后过原点，且以平移后的抛物线的顶点和它与 x 轴的两个交点为顶点的三角形的面积为 1. 若不存在，说明理由；若存在，求出平移后抛物线的解析式.

解　假设存在这样的平移向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$，将平移公式代入 $y=-x^2$ 得平移后的抛物线为

$$y-k=-(x-h)^2$$

即

$$y=-(x-h)^2+k$$

因为平移后抛物线过原点，所以 $k=h^2$. 由$\begin{cases}y=-(x-h)^2+k\\y=0\end{cases}$得

$$(x-h)^2=k \qquad ①$$

所以当 $k>0$ 时，$x=h\pm\sqrt{k}$，则抛物线与 x 轴两交点为(0,0)和$(2\sqrt{k},0)$或(0,0)和$(-2\sqrt{k},0)$. 因此抛物线在 x 轴上截得的弦长为 $2\sqrt{k}$. 又因为平移后抛物线的顶点为(h,k)，所以依题意有

$$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{k}\cdot k=1\quad(k>0)$$

则 $k=1$. 将其代入式①得 $h=\pm 1$. 所以存在满足已知条件的平移向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$ 或 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$. 当 $\boldsymbol{a}=(1,1)$ 时，平移后抛物线的解析式为

$$y=-(x-1)^2+1$$

即

$$y=-x^2+2x$$

当 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$ 时，平移后抛物线的解析式为

$$y=-(x+1)^2+1$$

即

$$y=-x^2-2x$$

(三)利用向量解复数问题

由于全体复数和平面上的点存在着一一对应的关系，因此可以把复数看成是以原点为始点的向量，又由于向量的加减法及数乘运算与复数的有关运算相对应，因此复数的一些问题可以用向量方法来解决.

1. 求值问题. 将复数用对应的向量表示，复数模即向量长，夹角转成向量的数量积，然后通过向量的运算，求出要求复数的值.

牵涉的复数知识有：若点 z_1,z_2 对应的复数为 $z_1(x_1,y_1),z_2(x_2,y_2)$，则向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 对应的复数为 $z_2-z_1=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$|\overrightarrow{z_1z_2}|=|z_2-z_1|$.

注意 若要确定某一向量所对应的复数，必须找从原点 O 出发的向量所对应的复数，若遇到不是由原点出发的向量，那么必须先平移，使它的始点为原点.

2. 牵涉到角的问题.

牵涉到角的问题可考虑通过向量旋转来解题.

常用到如下的命题：将任意平面向量 $\overrightarrow{AB}=(x,y)$ 绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角后得到的向量

$$\overrightarrow{AB'}=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$$

特别地，若 $\theta=\frac{\pi}{2}$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 逆时针旋转 90°所得的向量 $\overrightarrow{AB'}=(-y,x)$（即 $\overrightarrow{AB}$ 所对应的复数乘以 i）. 顺时针旋转 90°所得的向量 $\overrightarrow{AB''}=(y,-x)$（即 $\overrightarrow{AB}$ 所对应的复数乘以 $-$i）.

例 21 设复平面上三个不同的点 P,Q,R 分别对应复数 $z,\bar{z},z(1+\mathrm{i})$，已知 $\angle QPR=\frac{\pi}{2}$，$|z|=2$，求复数 z.

解 设 $\overrightarrow{OP}=(x,y)$，则 $\overrightarrow{OQ}=(x,-y)$. 因为

$$z(1+\mathrm{i})=z+z\mathrm{i}=(x,y)+(-y,x)=(x-y,x+y)$$

所以

$$\overrightarrow{OR}=(x-y,x+y),\quad \overrightarrow{PQ}=(0,-2y),\quad \overrightarrow{PR}=(-y,x)$$

因为$\angle QPR=\frac{\pi}{2}$，所以$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PR}$，则

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-2xy=0$$

因为 $z\neq\bar{z}$，所以 $y\neq 0$，则 $x=0$. 因为$|\overrightarrow{OP}|=2$，所以$\sqrt{x^2+y^2}=2$，则 $y=\pm 2$，即 $z=\pm 2i$.

例 22　如图 7.32，矩形 $ABCD$ 的边$|AD|:|AB|=2:3$，点 A,D 对应的复数分别为 $z_A=2+i$，$z_D=-1+2i$，点 A,B,C,D 的顺序是逆时针的，试求点 B,C 对应的复数.

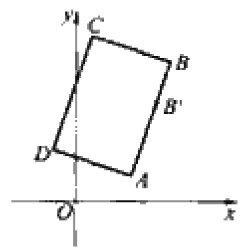


图 7.32

解　$\overrightarrow{AD}$对应的复数为 $z_D-z_A=-3+i$. 设点 B' 在 AB 上，且$|\overrightarrow{AB'}|=|\overrightarrow{AD}|$，则向量$\overrightarrow{AB'}$对应的复数为

$$(-3+i)\cdot(-i)=1+3i$$

因为$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB'}$，所以$\overrightarrow{AB}$对应的复数为

$$\frac{3}{2}(1+3i)=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i$$

则

$$z_B=(2+i)+(\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i)=\frac{7}{2}+\frac{11}{2}i$$

向量$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$对应的复数为

$$(z_D-z_A)+(z_B-z_A)=(-3+i)+(\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i)=-\frac{3}{2}+\frac{11}{2}i$$

则

$$z_C=(-\frac{3}{2}+\frac{11}{2}i)+(2+i)=\frac{1}{2}+\frac{13}{2}i$$

例 23　已知$\triangle ABC$ 的三个顶点 A,B,C 对应的复数分别为 z_1,z_2,z_3，若$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=1+\frac{4}{3}i$，证明$\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明　z_2-z_1 对应的向量为$\overrightarrow{AB}$，z_3-z_1 对应的向量为$\overrightarrow{AC}$，由

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|1+\frac{4}{3}i\right|=\frac{5}{3}$$

设 $AB=5k$，$AC=3k$，因为

$$z_2-z_1=(z_3-z_1)(1+\frac{4}{3}i)=z_3-z_1+\frac{4}{3}iz_3-\frac{4}{3}iz_1$$

所以

$$z_3 - z_2 = \frac{4}{3}\mathrm{i}(z_1 - z_3)$$

则

$$|z_3 - z_2| = |\frac{4}{3}\mathrm{i}||z_1 - z_3| = \frac{4}{3}\cdot 3k = 4k$$

即 $|\overrightarrow{BC}| = 4k$，所以 $\triangle ABC$ 是以点 C 为直角顶点的直角三角形.

二、走进考场 12

1.［2007·全国卷Ⅱ文、理一(9)］把函数 $y = \mathrm{e}^x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a} = (2,3)$［文科：$\boldsymbol{a} = (2,0)$］平移，得到 $y = f(x)$ 的图象，则 $f(x)$ 等于 （　　）

［理科］A. $\mathrm{e}^{x-3}+2$　　B. $\mathrm{e}^{x+3}-2$　　C. $\mathrm{e}^{x-2}+3$　　D. $\mathrm{e}^{x+2}-3$

［文科］A. $\mathrm{e}^{x}+2$　　B. $\mathrm{e}^{x}-2$　　C. e^{x-2}　　D. e^{x+2}

2.［2007·辽宁理一(6)、文一(7)］若函数 $y = f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后，得到函数 $y = f(x+1)-2$ 的图象，则向量 $\boldsymbol{a}$ 等于 （　　）

［理科］A. $(-1,-2)$　　B. $(1,-2)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(1,2)$

［文科］A. $(1,-2)$　　B. $(1,2)$　　C. $(-1,-2)$　　D. $(-1,2)$

3. 将函数 $y = x^2+5x+4$ 的图象沿 x 轴平移，使其通过原点，求平移后的函数解析式.

4. 求函数 $f(x) = \sqrt{5x}+\sqrt{6-x}$ 的最大值.

5. 求函数 $y = \sqrt{x^2-8x+20}-\sqrt{x^2+1}$ 的值域.

6. 求函数 $y = \sqrt{x^2+(y-b)^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$ 的最小值.

7. 已知 $a^2+b^2=1$，$ax+by=1$，其中 a,b,x,y 均为实数，试求 x^2+y^2 的取值范围.

8. 已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$，求 $x-2y$ 的取值范围.

9. 已知 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，求证：$|ac+bd|\leqslant 1$.

10. 已知 $xy=1\ 000$，$x>1$，$y>1$，求证：$\sqrt{1+\lg x}+\sqrt{1+\lg y}\leqslant\sqrt{10}$.

*11. 在复平面内，直角三角形的直角顶点 C 对应的复数为 -2，$30°$ 角的顶点 A 对应的复数为 $-5+\sqrt{3}\mathrm{i}$，求点 B 所对应的复数.

三、答案与提示

1. C

2.［理科］A　［文科］C

3. $y = x^2+3x$ 或 $y = x^2-3x$　提示：函数 $y = x^2+5x+4$ 与 x 轴的交点坐

标为$(-4,0)$,$(-1,0)$. ①若点$(-1,0)$平移到$(0,0)$,则 $\boldsymbol{a}=(1,0)$;②若点$(-4,0)$平移到$(0,0)$,则 $\boldsymbol{a}=(4,0)$

4.6　提示:设 $\boldsymbol{u}=(\sqrt{x},\sqrt{6-x})$,$\boldsymbol{v}=(\sqrt{5},1)$,$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$

5.$(-\infty,\sqrt{17})$　提示:设 $\boldsymbol{u}=(x-4,2)$,$\boldsymbol{v}=(x,1)$,$|\boldsymbol{u}|-|\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$

6.$\sqrt{b^2+c^2}$　提示:设 $\boldsymbol{u}=(x,b-y)$,$\boldsymbol{v}=(c-x,y)$,$|\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|\geqslant|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$

7.$[1,+\infty)$　提示:设 $\boldsymbol{u}=(a,b)$,$\boldsymbol{v}=(x,y)$,$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 夹角为θ,$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$,$-1\leqslant\cos\theta\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant 1$

8.$[5-\sqrt{5},5+\sqrt{5}]$　提示:设 $\boldsymbol{u}=(x-1,y+2)$,$\boldsymbol{v}=(1,-2)$,$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$

9.提示:设 $\boldsymbol{u}=(a,b)$,$\boldsymbol{v}=(c,d)$,$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$

10.提示:设 $\boldsymbol{u}=(\sqrt{1+\lg x},\sqrt{1+\lg y})$,$\boldsymbol{v}=(1,1)$,$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$

11.$-3+\sqrt{3}\mathrm{i}$或$-3-\sqrt{3}\mathrm{i}$　提示:$\overrightarrow{CA}$对应复数$-3+\sqrt{3}\mathrm{i}$,$CB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}CA$,$\overrightarrow{CB}$所对应的复数为$(-3+\sqrt{3}\mathrm{i})\cdot(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3})=-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$

第三节　向量法解三角函数题

(一)利用向量证明三角恒等式或推导公式

以向量作为工具对三角公式的推导、对三角恒等式的证明都有特殊的功效.

例 1　试证明余弦定理成立.

证一　如图 7.33,建立直角坐标系,则 $C(b,0)$,$B(C\cos\angle BAC,C\sin\angle BAC)$,所以$\overrightarrow{AB}=(c\cos\angle BAC,c\sin\angle BAC)$,$\overrightarrow{AC}=(b,0)$,于是

$$\overrightarrow{BC}=(b-c\cos\angle BAC,-c\sin\angle BAC)$$

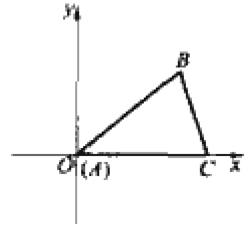


图 7.33

所以

$$\begin{aligned}a^2=|\overrightarrow{BC}|^2&=(b-c\cos\angle BAC)^2+(-c\sin\angle BAC)^2=\\&b^2-2bc\cos\angle BAC+c^2\cos^2\angle BAC+c^2\sin^2\angle BAC=\\&b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC\end{aligned}$$

证二　因为

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$$

所以

$$\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC$$

例 2 当 α、β 为锐角时，求证：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

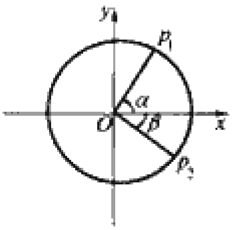


图 7.34

证明 如图 7.34，在直角坐标系中作单位圆 O，并作角 α 与 $-\beta$，设角 α 的终边与单位圆交于点 P_1，角 $-\beta$ 的终边与单位圆交于点 P_2，则

$\overrightarrow{OP_1}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$， $\overrightarrow{OP_2}=[\cos(-\beta),\sin(-\beta)]$

$\overrightarrow{OP_1}$与$\overrightarrow{OP_2}$的夹角为 $\alpha+\beta$. 因为

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=|\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OP_2}|\cos(\alpha+\beta)$$

所以

$$\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=1\cdot1\cos(\alpha+\beta)$$

即

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

（二）求最值

若题目中有出现 x^2+y^2，$\sqrt{x^2+y^2}$，$ax+by$ 形式的代数式，可考虑通过构造向量，利用向量数量积的性质、向量模的性质来解题. 构造向量的方法同上一讲，并注意利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，如设 $\boldsymbol{u}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$或 $\boldsymbol{u}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则$|\boldsymbol{u}|=1$.

注意 形如 $y=\dfrac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$的三角函数式求最值问题都可以用向量法来解.

例 3 求函数 $y=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$的最值.

解 由已知得

$$\sin x-y\cos x=2y-1$$

设 $\boldsymbol{u}=(\sin x,\cos x)$，$\boldsymbol{v}=(1,-y)$，则

$$|\boldsymbol{u}|=1,\quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{1+y^2},\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sin x-y\cos x=2y-1$$

由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{v}|$，得

$$2y-1\leqslant\sqrt{1+y^2}$$

两边平方整理得

$$3y^2-4y\leqslant0$$

解得 $0\leqslant y\leqslant \frac{4}{3}$，所以 $y_{\min}=0$，$y_{\max}=\frac{4}{3}$.

例4　已知定点 $A(0,a)$，$B(0,b)$，其中 $0<a<b$，在 x 轴的正半轴上求一点 C，使$\angle ACB$ 最大，并求出最大值.

解　设点 $C(x,0)(x>0)$，则$\overrightarrow{CA}=(-x,a)$，$\overrightarrow{CB}=(-x,b)$，所以

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=x^2+ab$$

$$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{x^2+a^2},\quad |\overrightarrow{CB}|=\sqrt{x^2+b^2}$$

则

$$\cos\angle ACB=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{x^2+ab}{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{x^2+b^2}}$$

令 $x^2+ab=t(t>0)$，则

$$x^2=t-ab$$

$$\cos\angle ACB=\frac{t}{\sqrt{(t-ab+a^2)(t-ab+b^2)}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+(a-b)^2t-ab(a-b)^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{-ab(a-b)^2\frac{1}{t^2}+(a-b)^2\frac{1}{t}+1}}$$

当且仅当$\frac{1}{t}=\frac{1}{2ab}$，即 $t=2ab$ 时，$\cos\angle ACB$ 取最小值$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$，此时 $x=\sqrt{ab}$，故当 $x=\sqrt{ab}$，$\angle ACB$ 有最大值，且最大值为 $\arccos\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$.

（三）求面积

如图 7.35，有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB||AC|\sin\angle BAC=$$
$$\frac{1}{2}|AB||AC|\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2|AC|^2-(|AB||AC|\cos\angle BAC)^2}=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|)^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

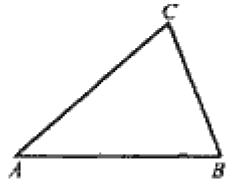


图 7.35

若以 A 为坐标原点，设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

例5　［2005·江西文理一（1）］在$\triangle OAB$ 中，O 为坐标原点，$A(1,\cos\theta)$，

$B(\sin\theta,1)$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$，则当$\triangle OAB$的面积达最大值时，$\theta$等于 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

解 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|)-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=$

$\frac{1}{2}\sqrt{(1+\cos^2\theta)(1+\sin^2\theta)-(\cos\theta+\sin\theta)^2}=$

$\frac{1}{2}\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta}=$

$\frac{1}{2}(1-\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta$

因为$0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$0<2\theta\leqslant\pi$，则$0\leqslant\sin 2\theta\leqslant 1$，所以当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$S_{\triangle OAB}$取得最大值$\frac{1}{2}$，应选D.

例6 已知$\triangle ABC$的三个顶点坐标分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，求$\triangle ABC$的面积.

解 如图7.36，将$\triangle ABC$平移到$\triangle A'B'O$，使点A，B，C分别与点A'，B'，O对应，因为

$$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{CA}=(x_1-x_3,y_1-y_3)$$
$$\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{CB}=(x_2-x_3,y_2-y_3)$$

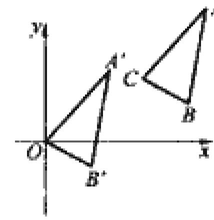


图7.36

所以

$$A'(x_1-x_3,y_1-y_3),\quad B'(x_2-x_3,y_2-y_3)$$

则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'B'O}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|)^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=$$

$$\frac{1}{2}|(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)|$$

（四）求值、化简

求某些特殊形式的三角函数的和时可考虑构造与单位圆或正多边形有关的向量.利用向量的如下性质来解题.

由于封闭多边形各边的向量和为**0**，根据平面向量基本定理，它们在同一基底上的分解向量的和也为**0**.据此，在构造向量时应使这些向量在某一基底上分解向量的系数要出现所要求和的三角函数形式.

例7 化简：(1) $\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+$

$\cos\left[\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$；

(2) $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left[\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$.

解　如图 7.37，因为角 $\theta,\theta+\frac{2\pi}{n},\theta+\frac{4\pi}{n},\cdots,\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}$ 成等差数列，且公差为 $\frac{2\pi}{n}$，等于正 n 边形的一个外角，因此构造正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，使 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 与 x 轴正向所成的角为 θ，在 x，y 轴上取两基底（与正向相同，大小等于边长）$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$，则

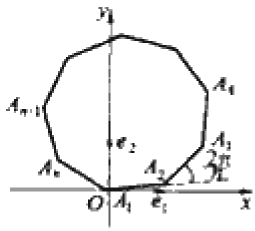


图 7.37

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_2$$
$$\overrightarrow{A_2A_3}=\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\boldsymbol{e}_1+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\boldsymbol{e}_2$$
$$\overrightarrow{A_3A_4}=\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{n}\right)\boldsymbol{e}_1+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{n}\right)\boldsymbol{e}_2$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{A_nA_1}=\cos\left[\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]\boldsymbol{e}_1+\sin\left[\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]\boldsymbol{e}_2$$

因为

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_1}=\mathbf{0}$$

所以

$$\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left[\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]=0$$
$$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left[\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]=0$$

例 8　计算：(1) $\sin\alpha+\sin(\alpha+72°)+\sin(\alpha+144°)+\sin(\alpha+216°)+\sin(\alpha+288°)$；

(2) $\cos\alpha+\cos(\alpha+72°)+\cos(\alpha+144°)+\cos(\alpha+216°)+\cos(\alpha+288°)$.

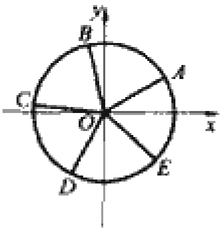


图 7.38

解　如图 7.38，点 A,B,C,D,E 在单位圆上并把单位圆分成五等分，则向量

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\mathbf{0}$$

相邻两向量之间的夹角为 $\frac{360°}{5}=72°$，设 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则 B,C,D,E 的坐标依次为

$$(\cos(\alpha+k\cdot72°),\sin(\alpha+k\cdot72°))\quad(k=1,2,3,4)$$

五个向量的和为零向量，则

$$\begin{cases}x_A+x_B+x_C+x_D+x_E=0\\ y_A+y_B+y_C+y_D+y_E=0\end{cases}$$

即

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+72^\circ)+\sin(\alpha+144^\circ)+\sin(\alpha+216^\circ)+\sin(\alpha+288^\circ)=0$$
$$\cos\alpha+\cos(\alpha+72^\circ)+\cos(\alpha+144^\circ)+\cos(\alpha+216^\circ)+\cos(\alpha+288^\circ)=0$$

注意 当单位圆上的三个点把单位圆分成三等分时，其正弦表示 $\sin\alpha+\sin(\alpha+120^\circ)+\sin(\alpha+240^\circ)=0$，其物理意义为三相交流电的电流强度 $I_A+I_B+I_C=0$.

例 9 已知 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$，求 α,β 的值.

解 已知可变形为

$$\sin\alpha\sin\beta+(1-\cos\alpha)\cos\beta=\frac{3}{2}-\cos\alpha$$

构造向量 $\boldsymbol{u}=(\sin\beta,\cos\beta)$，$\boldsymbol{v}=(\sin\alpha,1-\cos\alpha)$，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sin\alpha\sin\beta+(1-\cos\alpha)\cos\beta=\frac{3}{2}-\cos\alpha$$

$$|\boldsymbol{u}|=1,\quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)^2}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ 得

$$\frac{3}{2}-\cos\alpha\leqslant\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

平方得

$$\cos^2\alpha-\cos\alpha+\frac{1}{4}\leqslant 0$$

即

$$(\cos\alpha-\frac{1}{2})^2\leqslant 0$$

从而 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 由 α,β 的对称性可得 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$.

* **例 10** 已知 $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$，求 $\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}$ 的值.

解 构造向量 $\boldsymbol{u}=\left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta},\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}\right)$，$\boldsymbol{v}=(\cos\beta,\sin\beta)$，则

$$|\boldsymbol{u}|=1,\quad |\boldsymbol{v}|=1,\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

若设 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}=1$$

所以 $\theta=0°$，则 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同向，所以 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$，即

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}=\cos\beta,\quad \frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}=\sin\beta$$

$$\cos^2\alpha=\cos^2\beta,\quad \sin^2\alpha=\sin^2\beta$$

所以

$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$$

(五)比大小或证明不等式

要证形如 $a<b<c$ 的不等式，可在数轴上作出以 a,b,c 为坐标的三点 P_1,P,P_2，如图 7.39 所示，则 $\overrightarrow{P_1P}$ 对应 $b-a$，$\overrightarrow{PP_2}$ 对应 $c-b$，设 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，即 $\lambda=\dfrac{b-a}{c-b}$，若能证得 $\lambda>0$，则 P 为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的内分点，点 P 对应的坐标 b 就介于 P_1,P_2 对应的坐标之间，于是证得 $a<b<c$.

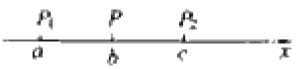


图 7.39

例 11　已知 $m>n>0,\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. 求证：$\dfrac{m\sin\theta+n}{m\sin\theta-n}$ 不能介于 $\dfrac{m-n}{m+n}$ 与 $\dfrac{m+n}{m-n}$ 之间，即 $\dfrac{m-n}{m+n}<\dfrac{m\sin\theta+n}{n\sin\theta-n}<\dfrac{m+n}{m-n}$ 不可能成立.

证明　由 $m>n>0$ 可得

$$\frac{m+n}{m-n}>\frac{m-n}{m+n}>0$$

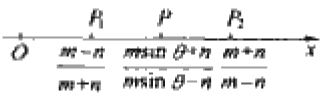


图 7.40

如图 7.40，设 P_1,P_2,P 是数轴上的三点，其坐标依次为

$$\frac{m-n}{m+n},\quad \frac{m+n}{m-n},\quad \frac{m\sin\theta+n}{m\sin\theta-n}$$

并设点 P 是有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的内分点，则点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda>0$，即

$$\lambda=\frac{\dfrac{m\sin\theta+n}{m\sin\theta-n}-\dfrac{m-n}{m+n}}{\dfrac{m+n}{m-n}-\dfrac{m\sin\theta+n}{m\sin\theta-n}}=\frac{(1+\sin\theta)(m-n)}{(\sin\theta-1)(m+n)}$$

因为 $\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，所以 $-1<\sin\theta<1$，则 $\lambda<0$，这与假设矛盾，所以 $\dfrac{m\sin\theta+n}{m\sin\theta-n}$ 不可能介于 $\dfrac{m-n}{m+n}$ 与 $\dfrac{m+n}{m-n}$ 之间，即 $\dfrac{m-n}{m+n}<\dfrac{m\sin\theta+n}{m\sin\theta-n}<\dfrac{m+n}{m-n}$ 不可能成立.

例 12 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，试比较 $\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}$ 与 $(a+b)^2$ 的大小.

解 构造向量 $\boldsymbol{u}=\left(\frac{a}{\cos\theta},\frac{b}{\sin\theta}\right)$，$\boldsymbol{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=a+b,\quad |\boldsymbol{u}|=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}},\quad |\boldsymbol{v}|=1$$

由 $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2\leqslant|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2$ 得

$$(a+b)^2\leqslant\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}$$

上式当且仅当 $\frac{a}{\cos^2\theta}=\frac{b}{\sin^2\theta}>0$，即 $\tan^2\theta=\frac{b}{a}$ 时取等号.

(六)解三角形

例 13 [2005·湖北理三(18)]在△ABC 中，已知 $AB=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，$\cos B=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$AC$ 边上的中线 $BD=\sqrt{5}$，求 $\sin A$.

解 因为点 D 为 AC 中点，所以

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$$

两边平方得

$$\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BD}^2$$

设 $BC=x$，则

$$\frac{32}{3}+x^2+\frac{8}{3}x=20$$

所以 $x=2$ 或 $-\frac{14}{3}$(舍去)，从而

$$|AC|^2=\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2+2^2-2\times2\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{28}{3}$$

得 $AC=\frac{2\sqrt{21}}{3}$. 由正弦定理得

$$\frac{|BC|}{\sin A}=\frac{|AC|}{\sin B}$$

所以

$$\sin A=\frac{|BC|\sin B}{|AC|}=\frac{2\times\sqrt{\frac{5}{6}}}{\frac{2\sqrt{21}}{3}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$$

(七)利用向量平移化简三角函数式

例 14 [2008·湖北理一(5)]将函数 $y=3\sin(x-\theta)$的图象 F 按向量$(\frac{\pi}{3},3)$平移得到图象 F',若 F'的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{4}$,则 θ 的一个可能取值是 ( )

A. $\frac{5}{12}\pi$　　B. $-\frac{5}{12}\pi$　　C. $\frac{11}{12}\pi$　　D. $-\frac{11}{12}\pi$

解 将函数 $y=3\sin(x-\theta)$的图象按向量$(\frac{\pi}{3},3)$平移得到的图象的解析式为

$$y=3\sin(x-\frac{\pi}{3}-\theta)+3$$

由 $x=\frac{\pi}{4}$是一条对称轴,得

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}-\theta=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in \mathbf{Z}$$

当 $k=-1$ 时,$\theta=\frac{5\pi}{12}$,应选 A.

例 15 [2006·安徽理一(6)、文一(9)]将函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$的图象按向量 $a=\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$平移,平移后的图象如图 7.41 所示,则平移后的图象所对应函数的解析式是 ( )

A. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

B. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

D. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

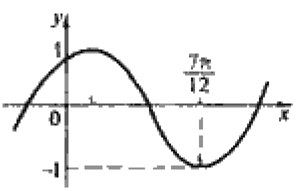


图 7.41

解 将函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$的图象按向量 $a=\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$平移(可将 $x=x'+\frac{\pi}{6}$,$y=y'$代入 $y=\sin\omega x$)得

$$y'=\sin\omega\left(x'+\frac{\pi}{6}\right)$$

所以平移后的图象所对应的解析式为

$$y=\sin\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

由图象知

$$\omega\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{2}$$

所以 $\omega=2$，则 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，应选 C.

例 16 ［2006·湖北理三(16)］设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，其中向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,-\cos x)$，$\boldsymbol{b}=(\sin x,-3\cos x)$，$\boldsymbol{c}=(-\cos x,\sin x)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最大值和最小正周期;

(2)将函数 $y=f(x)$ 的图象按向量 d 平移，使平移后得到的图象关于坐标原点成中心对称，求长度最小的 d.

解 (1)

$$\begin{aligned}f(x)&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\\&(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x-\cos x,\sin x-3\cos x)=\\&\sin^2x-2\sin x\cos x+3\cos^2x=\\&2+\cos 2x-\sin 2x=\\&2+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的最大值为 $2+\sqrt{2}$，最小正周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由 $\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$ 得

$$2x+\frac{3\pi}{4}=k\pi$$

即

$$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8},\quad k\in\mathbf{Z}$$

于是

$$\boldsymbol{d}=\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{k\pi}{2},-2\right),\quad |\boldsymbol{d}|=\sqrt{\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)^2+4},\quad k\in\mathbf{Z}$$

因为 k 为整数，要使 $|\boldsymbol{d}|$ 最小，则只有 $k=1$，此时 $\boldsymbol{d}=\left(-\frac{\pi}{8},-2\right)$ 即为所求.

二、走进考场 13

1.［2008·福建理一(9)］函数 $f(x)=\cos x(x\in\mathbf{R})$ 的图象按向量 $(m,0)$ 平移后，得到函数 $y=-f'(x)$ 的图象，则 m 的值可以为 （　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $-\pi$　　D. $-\frac{\pi}{2}$

2.[2008·安徽理一(5)]将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后所得的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 中心对称，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标可能为 ( )

A. $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ B. $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ D. $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$

3.[2007·湖北理一(2)]将 $y=2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=\left(-\frac{\pi}{4},-2\right)$ 平移，则平移后所得图象的解析式为 ( )

A. $y=2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-2$ B. $y=2\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+2$

C. $y=2\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{12}\right)-2$ D. $y=2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{12}\right)+2$

4.[2004·福建文理三(17)]设函数 $f=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos x,1)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)若 $f(x)=1-\sqrt{3}$ 且 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，求 x.

(2)若函数 $y=2\sin 2x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{c}=(m,n)\left(|m|<\frac{\pi}{2}\right)$ 平移后得到函数 $y=f(x)$ 的图象，求实数 m,n 的值.

5.证明：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

6.求 $y=\frac{2-\cos x}{\sin x}(0<x<\pi)$ 的最小值.

7.计算：$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

*8.设 $x\in\mathbf{R}$，求证：$-\frac{1}{3}\leqslant\frac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}\leqslant 3$.

三、答案与提示

1.A 提示：$y=-f'(x)=\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $y=\cos x$ 按向量 $(m,0)$ 平移后得到 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象，所以 $m=\frac{\pi}{2}$

2.C 提示：(验证法)，如 A，平移后得 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$，不关于 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称，所以 A 错

3.A

4.(1) $-\frac{\pi}{4}$ (2) $m=-\frac{\pi}{12}$，$n=1$ 提示：(1) $f(x)=1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=$

$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1=1-\sqrt{3}$，所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$．$-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$．$2x+\frac{\pi}{6}$ （2）平移后为 $y-n=2\sin 2(x-m)$，即 $y=2\sin 2(x-m)+n=f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+1$

5.提示：设 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 是角 α，β 终边上的单位向量，则 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

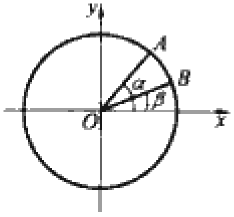


图 7.42

6.$\sqrt{3}$　提示：由原式得 $\cos x+y\sin x=2$，设 $\boldsymbol{u}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{v}=(1,y)$，由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ 得 $a\leqslant\sqrt{1+y^2}$，所以 $y\geqslant\sqrt{3}$．当且仅当 $\frac{\cos x}{1}=\frac{\sin x}{y}=\frac{\sin^2 x}{2-\cos x}>0$，$\cos x=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时等号成立，如图7.42所示

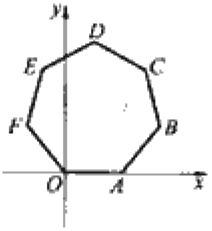


图 7.43

7.$-\frac{1}{2}$　提示：构造边长为 1 的正七边形 $OABCDEF$，如图 7.43 所示，则 $\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{AB}=\left(\cos\frac{2\pi}{7},\sin\frac{2\pi}{7}\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\cos\frac{4\pi}{7},\sin\frac{4\pi}{7}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\cos\frac{6\pi}{7},\sin\frac{6\pi}{7}\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(\cos\frac{8\pi}{7},\sin\frac{8\pi}{7}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\cos\frac{10\pi}{7},\sin\frac{10\pi}{7}\right)$，$\overrightarrow{FO}=\left(\cos\frac{12\pi}{7},\sin\frac{12\pi}{7}\right)$，因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FO}=0$，所以这些向量的横坐标的和为 0，所以 $1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$，即 $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7}$，$\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7}$，$\cos\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$

8.提示：①当 $\cos x=1$ 时，$\sin x=0$，$\frac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}=-\frac{1}{3}$，所以不等式成立；②当 $\sin x=-1$ 时，$\cos x=0$，$\frac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}=3$，不等式成立；③当 $\cos x\neq 1$ 且 $\sin x\neq -1$ 时，$-\frac{1}{3}$，$\frac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}$，3 分别对应同一数轴上的

三点：P_1，P，P_2，设$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则 $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}}=\dfrac{\dfrac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}{3-\dfrac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}}=$

$\dfrac{2(1-\cos x)}{3(1+\sin x)}>0$. 所以当 $\sin x\neq 1$ 且 $\cos x\neq 1$ 时，$\dfrac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}$在 $-\dfrac{1}{3}$ 与 3 之间

第四节　向量法解解析几何题

向量法是解决解析几何问题的一把利剑，它为求解解几问题开辟了一条新途径，利用向量法巧解高考数学试题已成为解题的一种技巧．鉴于高考试题中利用向量法来解的解几试题已屡见不鲜，因此掌握这种技巧已十分必要．

向量法解解几问题的基本思路是根据题意巧妙构造向量，或把题中有关线段看作向量，角看成两向量夹角，利用向量运算的几何意义和有关公式（如数量积公式、定比分点公式等）进行运算，并注意利用共线向量和垂直向量的充要条件，从而使问题得到解决．

凡涉及两直线平行、垂直、交角、线段比、三点共线等的解几问题，可考虑利用向量法解之．利用向量法解解几问题的步骤如下．

(1)建立直角坐标系，必要时设参数，求出相关点和向量的坐标．

(2)根据已知条件和向量的有关性质列出等式．

(3)进行向量运算求得结果．

(一)利用向量法推导解几中的一些公式或定理

1. 常用的向量知识．

(1)设与直线 l 平行的向量记为$\boldsymbol{m}$（即直线 l 的方向向量），与直线 l 垂直的向量（即直线 l 的法向量）记为 $\boldsymbol{n}$．

①若直线 l 的斜率为k，则 $\boldsymbol{m}=(1,k)$，$\boldsymbol{n}=(-k,1)$；若 $k=\dfrac{a_2}{a_1}$，则 $\boldsymbol{m}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{n}=(-a_2,a_1)$．

②若直线 l 的方程为$Ax+By+C=0$，则 $\boldsymbol{m}=(-B,A)$，$\boldsymbol{n}=(A,B)$．

(2)过点 $P_0(x_0,y_0)$且与向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$平行的直线方程为：$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0$；过点 $P_0(x_0,y_0)$且与向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$垂直的直线方程为：$a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)=0$．

2. 利用向量法研究两直线位置关系．

设直线 l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$ 的一个方向向量为 $\boldsymbol{d}=(-b_1,a_1)$，直线 l_2：

$a_2x+b_2y+c_2=0$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(a_2,b_2)$.

(1)当 $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}=a_1b_2-a_2b_1=0$,即 $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{n}$ 时,直线 l_1 与直线 l_2 重合或平行.

(2)当 $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}=a_1b_2-a_2b_1\neq0$,即 $\boldsymbol{d}$ 不与 $\boldsymbol{n}$ 垂直时,直线 l_1 与直线 l_2 相交.

3. 利用向量法推导两直线 $l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ 的夹角公式.

与直线 l_1 平行的向量 $\boldsymbol{m}_1=(-b_1,a_1)$,与直线 l_2 平行的向量 $\boldsymbol{m}_2=(-b_2,a_2)$,则

$$\cos<\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2>=\frac{\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2}{|\boldsymbol{m}_1||\boldsymbol{m}_2|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

设两直线夹角为 α,则

$$\cos\alpha=|\cos<\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2>|=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

所以

$$\alpha=\arccos\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

特别地,当 $\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2=0$,即 $a_1a_2+b_1b_2=0$ 时,$l_1\perp l_2$;反之也成立.

4. 利用向量法推导点到直线距离公式.

如图 7.44,设点 $P_0(x_0,y_0)$ 为直线 $l:Ax+By+C=0$ 外一点,点 P_0 到直线 l 的距离记为 d. 又设垂足为 $Q(x_1,y_1)$,因为点 Q 在进线 l 上,所以

$$Ax_1+By_1+C=0 \quad ①$$

$$\overrightarrow{P_0Q}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$$

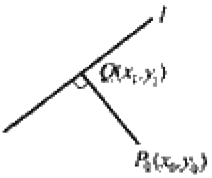


图 7.44

l 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B)$,因为 $\overrightarrow{P_0Q}\perp l$,所以 $\overrightarrow{P_0Q}/\!/\boldsymbol{n}$.

证一 设 $\overrightarrow{P_0Q}=\lambda\boldsymbol{n}=(\lambda A,\lambda B)$,则

$$\begin{cases}x_1-x_0=\lambda A\\y_1-y_0=\lambda B\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}x_1=\lambda A+x_0\\y_1=\lambda B+y_0\end{cases}$$

将上式代入式①得

$$(A^2+B^2)\lambda+(Ax_0+By_0+C)=0$$

所以

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$$

则

$$d = |P_0Q| = \sqrt{(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2} = |\lambda|\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

证二 $\overrightarrow{P_0Q} \cdot \boldsymbol{n} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = (Ax_1 + By_1) - (Ax_0 + By_0) =$

$$-C - Ax_0 - By_0 = -(Ax_0 + By_0 + C) =$$

$$|P_0Q||\boldsymbol{n}|\cos < \overrightarrow{P_0Q}, \boldsymbol{n} > = \pm |P_0Q||\boldsymbol{n}|$$

所以

$$|\overrightarrow{P_0Q} \cdot \boldsymbol{n}| = |P_0Q||\boldsymbol{n}| = |P_0Q|\sqrt{A^2 + B^2}$$

则

$$|P_0Q| = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \cdot \boldsymbol{n}|}{\sqrt{A_2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

5. 利用向量法求两直线夹角的平分线方程.

设直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 求其夹角平分线方程的步骤如下.

(1)取两直线的方向向量 $\boldsymbol{m}_1 = (-B_1, A_1)$, $\boldsymbol{m}_2 = (-B_2, A_2)$, 如图 7.45 所示.

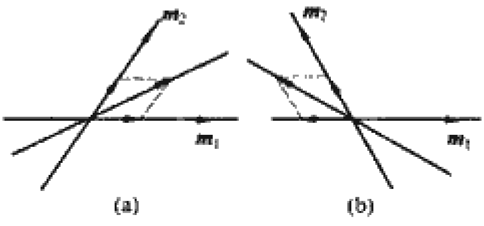


图 7.45

(2)计算: $A_1A_2 + B_1B_2$;

(3)若 $A_1A_2 + B_1B_2 > 0$(此时 $\cos < \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 > > 0$, 说明 $< \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 >$ 为锐角), 则角平分线的方向向量为 $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{m}_1}{|\boldsymbol{m}_1|} + \frac{\boldsymbol{m}_2}{|\boldsymbol{m}_2|}$; 若 $A_1A_2 + B_1B_2 < 0$(说明 $< \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 >$ 为钝角), 则角平分线的方向向量为 $\boldsymbol{m} = -\frac{\boldsymbol{m}_1}{|\boldsymbol{m}_1|} + \frac{\boldsymbol{m}_2}{|\boldsymbol{m}_2|}$, 设 $\boldsymbol{m} = (a, b)$.

(4)求出两直线交点坐标 $P(x_0, y_0)$.

(5)由直线的点向式方程得解分线方程为: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$(即 $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$).

由上可见, 用向量法求两直线的夹角平分线方程比用直线的斜率求来得简单, 因为用向量法解避开了对直线斜率是否存在的讨论. 但要注意向量的夹角与直线的夹角是相等或互补的关系. 另外, 当 $A_1A_2 + B_1B_2 > 0$ 时也包含夹

角等于 0 的情况.

6. 利用向量法求直线的法线式方程.

如图 7.46，由原点 O 向直线 l 作垂线，垂足为 Q，设 $|OQ|=p$，OQ 与 x 轴正方向的夹角为 θ，求证直线 l 的方程为：$x\cos\theta+y\sin\theta=p$.

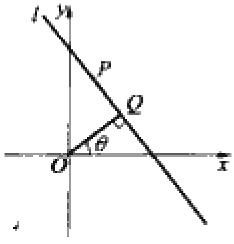


图 7.46

证明　设点 $P(x,y)$ 为 l 上任一点，因为 $\overrightarrow{OQ}=(p\cos\theta,p\sin\theta)$，所以 $\overrightarrow{QP}=(x-p\cos\theta,y-p\sin\theta)$. 由于 $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{QP}$，所以 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{QP}=0$，则

$$p\cos\theta(x-p\cos\theta)+p\sin\theta(y-p\sin\theta)=0$$

$$xp\cos\theta+yp\sin\theta=p^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

所以 $x\cos\theta+y\sin\theta=p$. 因此直线 l 的方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta=p$$

注意　这个方程称为直线的法线式方程.

7. 利用共线向量定理求两直线交点坐标.

如图 7.47，已知 $A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$，$C(c_1,c_2)$，$D(d_1,d_2)$，直线 AB 与 CD 交于点 O，求点 O 的坐标.

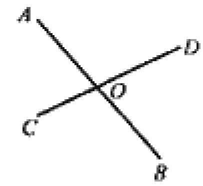


图 7.47

解　因为 A,O,B 三点共线，所以可设

$$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda(b_1-a_1,b_2-a_2)=(\lambda(b_1-a_1),\lambda(b_2-a_2))$$

则

$$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AO}=(a_1-c_1,a_2-c_2)+(\lambda(b_1-a_1),\lambda(b_2-a_2))=((a_1-c_1)+\lambda(b_1-a_1),(a_2-c_2)+\lambda(b_2-a_2))$$

又因为 $\overrightarrow{CO}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线，所以

$$\frac{(a_1-c_1)+\lambda(b_1-a_1)}{d_1-c_1}=\frac{(a_2-c_2)+\lambda(b_2-a_2)}{d_2-c_2}$$

由此方程可解得 λ 的值，代入 $\overrightarrow{AO}$ 可求得 $\overrightarrow{AO}$，于是点 O 坐标可求.

8. 推导圆的直径式方程.

已知一个圆的直径的两个端点是 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，求证：圆的方程是 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

证明　设 $P(x,y)$ 是圆上任一点，则

$$\overrightarrow{AP}=(x-x_1,y-y_1),\quad \overrightarrow{BP}=(x-x_2,y-y_2)$$

因为 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$，所以

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

因此圆的方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

这个方程称为圆的直径式方程.

9. 推导"截比定理".

已知直线 $l: Ax+By+C=0$ 与联结两定点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$的线段相交于点 P，则点 P 分$\overrightarrow{MN}$的比$\lambda=-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

证明　设$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$，点 P 坐标为(x_0,y_0)，则

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y_0=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

因为点 P 在直线$Ax+By+C=0$上，所以

$$A\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C=0$$

$$A(x_1+\lambda x_2)+B(y_1+\lambda y_2)+C(1+\lambda)=0$$

$$(Ax_2+By_2+C)\lambda+(Ax_1+By_1+C)=0$$

所以

$$\lambda=\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$$

说明　(1)本题结论称"截比定理". 遇两定点连线被一直线所截时，常用此定理来帮助解题.

(2)若直线 l 与线段 MN 的延长线相交，则右边的"－"号应改为"＋"号.

(二)涉及两直线垂直(或成直角)的问题

该问题常转化为两向量数量积为 0 来处理.

例 1　[2005·上海文三(21)]如图 7.48，已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，A 是抛物线上横坐标为 4 且位于 x 轴上方的点，A 到抛物线准线的距离等于 5，过点 A 作 AB 垂直于 y 轴，垂足为点 B，OB 的中点为点 M.

(1)求抛物线方程；

(2)过点 M 作 $MN\perp FA$，垂足为点 N，求点 N 的坐标.

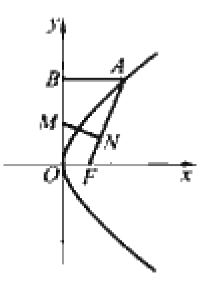


图 7.48

解　(1)抛物线方程为：$y^2=4x$，解法略.

(2)因为 $x_A=4$，所以 $y_A=4$，则 $A(4,4)$，所以 $B(0,4)$，$M(0,2)$，$F(1,0)$，$\overrightarrow{FA}=(3,4)$. 因为 F，N，A 三点共线，所以可设$\overrightarrow{FN}=\lambda\overrightarrow{FA}=(3\lambda,4\lambda)$，所以 $N(3\lambda+1,4\lambda)$，$\overrightarrow{MN}=(3\lambda+1,4\lambda-2)$. 因为 $MN\perp FA$，所以

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{FA}=0$，则$3(3\lambda+1)+4(4\lambda-2)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$，所以 $N\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

例 2 已知 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，点 P 满足 $|PF_1|-|PF_2|=2$，记点 P 的轨迹为 E.

(1)求轨迹 E 的方程；

(2)如图 7.49，若直线 l 过点 F_2 且与轨迹 E 交于 P,Q 两点，无论直线 l 绕点 F_2 怎样转动，在 x 轴上总存在定点 $M(m,0)$，使 $MP\perp MQ$ 恒成立，求实数 m 的值.

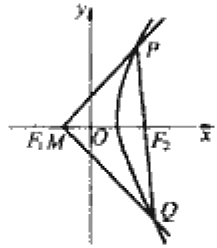


图 7.49

解 (1)轨迹方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，其中 $x\geqslant 1$，解法略.

(2)当直线 l 斜率存在时，设直线 l 的方程为$y=k(x-2)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}y=k(x-2)\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 y 得

$$(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$$

所以

$$x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-3},\quad x_1x_2=\frac{4k^2+3}{k^2-3}$$

所以 $k^2-3\neq 0$，$\Delta>0$，$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3}>0$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}>0$，解得 $k^2>3$.

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=&(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2=(x_1-m)(x_2-m)+k^2(x_1-2)(x_2-2)=\\&(k^2+1)x_1x_2-(2k^2+m)(x_1+x_2)+m^2+4k^2=\\&(k^2+1)\frac{4k^2+3}{k^2-3}-(2k^2+m)\frac{4k^2}{k^2-3}+4k^2+m^2=\\&\frac{3-(4m+5)}{k^2-3}+m^2\end{aligned}$$

由 $MP\perp MQ$ 得$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，所以

$$\frac{3-(4m+5)k^2}{k^2-3}+m^2=0$$

即

$$3(1-m^2)+k^2(m^2-4m-5)=0$$

对任意的 $k^2>3$ 恒成立，所以$\begin{cases}1-m^2=0\\m^2-4m-5=0\end{cases}$，解得 $m=-1$，即当 $m=-1$ 时，$MP\perp MQ$.

当直线 l 的斜率不存在时，由 $P(2,3)$，$Q(2,-3)$及 $M(-1,0)$得$\overrightarrow{MP}\cdot$

$\overrightarrow{MQ}=(3,3)\cdot(3,-3)=0$，综上，当 $m=-1$ 时，$MP\perp MQ$.

例 3 ［2008·广东理三(8)文三(20)］设 $b>0$，椭圆方程为 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$. 如图 7.50，过点 $F(0,b+2)$ 作 x 轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为点 G，已知抛物线在点 G 处切线经过椭圆的右焦点 F_1.

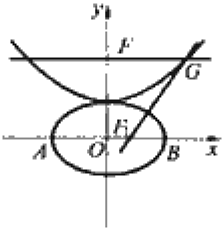


图 7.50

(1)求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

(2)设 A,B 分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点 P，使得△ABP 为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由(不必具体求出这些点的坐标).

解 (1)椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，抛物线方程为 $x^2=8(y-1)$，解法略.

(2)因为过点 A 作 x 轴的垂线与抛物线只有一个交点 P，所以∠PAB 为直角的 Rt△ABP 只有一个；同理，以∠PBA 为直角的 Rt△ABP 也只有一个.

若以∠APB 为直角，设点 P 坐标为 $(x,\frac{1}{8}x^2+1)$. 因为 $A(-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},0)$，所以

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-\sqrt{2}-x,-(\frac{1}{8}x^2+1))(\sqrt{2}-x,-(\frac{1}{8}x^2+1))=$$
$$x^2-2+(\frac{1}{8}x^2+1)^2=\frac{1}{64}x^4+\frac{5}{4}x^2-1$$

由

$$\frac{1}{64}x^4+\frac{5}{4}x^2-1=0 \qquad ①$$

设 $t=x^2$，得

$$\frac{1}{64}t^2+\frac{5}{4}t-1=0$$

此方程只有一个正根，所以满足方程①的 x 有两解，即以∠APB 为直角的 Rt△ABP有两个. 综上，抛物线上存在四个点，使得△ABP 为直角三角形.

例 4 如图 7.51，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 $B(0,1)$，点 $A(a,0)(a\neq0)$是 x 轴上的动点，过点 A 作线段 AB 的垂线交 y 轴于点 D，在直线 AD 上取点 P，使 $AP=DA$.

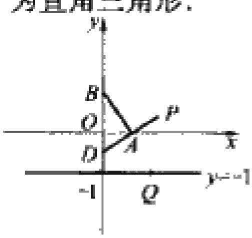


图 7.51

(1)求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2)点 Q 是直线 $y=-1$ 上的一个动点，过点 Q 作

轨迹 C 的两条切线，切点分别为 M,N，求证：$QM\perp QN$.

解 (1)轨迹 C 的方程为 $x^2=4y$，其中 $y\neq 0$，解法略.

(2)设 $Q(t,-1)$，$M\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$N\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$. 因为 $x^2=4y$，所以 $y'=\frac{1}{2}x$，则

$$k_{MQ}=\frac{1}{2}x_1,\quad k_{NQ}=\frac{1}{2}x_2$$

所以

$$\frac{\frac{1}{4}x_1^2+1}{x_1-t}=\frac{1}{2}x_1$$

即

$$x_1^2-2tx_1-4=0$$

同理

$$x_2^2-2tx_2-4=0$$

所以 x_1,x_2 是方程 $x^2-2tx-4=0$ 的两根，则

$$\begin{cases}x_1+x_2=2t\\x_1x_2=-4\end{cases}$$

所以

$$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=\left(x_1-t,\frac{x_1^2}{4}+1\right)\left(x_2-t,\frac{x_2^2}{4}+1\right)=$$

$$x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+\frac{1}{16}x_1^2x_2^2+\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)+1=$$

$$-4-2t^2+t^2+1+\frac{1}{4}(4t^2+8)+1=0$$

所以 $\overrightarrow{QM}\perp\overrightarrow{QN}$，即 $QM\perp QN$.

(三)涉及角的问题

若求角的值或判断两角是否相等，或判断两直线夹角是锐角、钝角等，常逆用数量积公式去计算其余弦值(进而求出角)或去判断余弦值符号.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0\Leftrightarrow\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>\ >0$ 且不为 1 时$\Leftrightarrow$

$\angle BAC$ 为锐角$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0\Leftrightarrow$

$\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>\ <0$ 且不为 -1 时$\Leftrightarrow$

$\angle BAC$ 为钝角

例 5 [2005·江西理三(22)]如图 7.52，设抛物线 $C:y=x^2$ 的焦点为 F，动点 P 在直线 $l:x-y-2=0$ 上运动，过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA,PB，且与抛物线 C 分别相切于 A,B 两点.

(1)求△APB 的重心 G 的轨迹方程；

(2)证明：$\angle PFA=\angle PFB$.

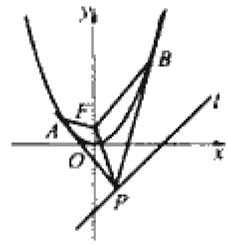


图 7.52

解 (1)设 $A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)(x_1\neq x_2)$，得 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_1x_2\right)$，轨迹方程为：$4x^2-x-3y+2=0$，解法略.

(2)由于 $F(0,\frac{1}{4})$，所以

$$\overrightarrow{FA}=\left(x_1,x_1^2-\frac{1}{4}\right),\quad \overrightarrow{FP}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_1x_2-\frac{1}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{FB}=\left(x_2,x_2^2-\frac{1}{4}\right),\quad |\overrightarrow{FP}|\neq 0$$

因为

$$\cos\angle PFA=\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FP}||\overrightarrow{FA}|}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot x_1+(x_1x_2-\frac{1}{4})(x_1^2-\frac{1}{4})}{|\overrightarrow{FP}|\sqrt{x_1^2+(x_1^2-\frac{1}{4})^2}}=$$

$$\frac{x_1^3x_2+\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_1x_2+\frac{1}{16}}{|\overrightarrow{FP}|\sqrt{x_1^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}}}=\frac{(x_1x_2+\frac{1}{4})(x_1^2+\frac{1}{4})}{|\overrightarrow{FP}|\sqrt{(x_1^2+\frac{1}{4})^2}}=\frac{x_1x_2+\frac{1}{4}}{|\overrightarrow{FP}|}$$

同理有·

$$\cos\angle PFB=\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FP}||\overrightarrow{FB}|}=\frac{x_1x_2+\frac{1}{4}}{|\overrightarrow{FP}|}$$

所以

$$\cos\angle PFA=\cos\angle PFB$$

即$\angle PFA=\angle PFB$.

例 6 [2007·四川理三(20)、文三(21)]设 F_1,F_2 分别是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右焦点.

(1)若 P 是该椭圆上的一个动点，求$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的最大值和最小值；

(2)设过定点 $M(0,2)$的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A,B，且$\angle AOB$ 为锐角(其中 O 为坐标原点)，求直线 l 的斜率 K 的取值范围.

解 (1)最大值 1，最小值 -2，解法略.

(2)显然直线 $x=0$ 不满足题设条件，可设直线 $l:y=kx+2$，$A(x_1,y_1)$，

$B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases} y=kx+2 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$消去 y 并整理得

$$\left(k^2+\frac{1}{4}\right)x^2+4kx+3=0$$

所以

$$x_1+x_2=-\frac{4k}{k^2+\frac{1}{4}},\quad x_1x_2=\frac{3}{k^2+\frac{1}{4}}$$

由

$$\Delta=(4k^2)-4\left(k^2+\frac{1}{4}\right)\times 3=4k^2-3>0$$

得

$$k>\frac{\sqrt{3}}{2}\text{或 }k<-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ①$$

又

$$0^\circ<\angle AOB<90^\circ \Leftrightarrow \cos\angle AOB>0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$$

所以

$$x_1x_2+y_1y_2>0$$

又

$$y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=$$
$$\frac{3k^2}{k^2+\frac{1}{4}}+\frac{-8k^2}{k^2+\frac{1}{4}}+4=\frac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}$$

所以

$$\frac{3}{k^2+\frac{1}{4}}+\frac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}>0$$

即

$$k^2<4$$

所以

$$-2<k<2 \qquad ②$$

由式①、式②得 $-2<k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}<k<2$.

例 7 ［2008·福建理三(21)］如图 7.53，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点是 $F(1,0)$，O 为坐标原点.

(1)已知椭圆短轴的两个三等分点与一个焦点构成正三角形,求椭圆的方程;

(2)设过点 F 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点,若直线 l 绕点 F 任意转动,恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$,求 a 的取值范围.

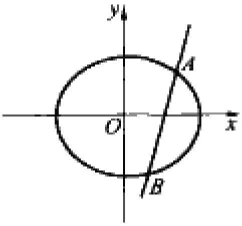


图 7.53

解 (1)椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,解法略.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

①当直线 AB 与 x 轴重合时,$|OA|^2+|OB|^2=2a^2$,$|AB|^2=4a^2$,$|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$ 成立.

②当直线 AB 不与 x 轴重合时,设直线 AB 的方程为 $x=my+1$,代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,整理得

$$(a^2+b^2m^2)y^2+2b^2my+b^2-a^2b^2=0$$

所以

$$y_1+y_2=-\frac{2b^2m}{a^2+b^2m^2},\quad y_1y_2=\frac{b^2-a^2b^2}{a^2+b^2m^2}$$

因为恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$,所以$\angle AOB$ 恒为钝角,即

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2<0$$

恒成立.而

$$\begin{aligned}x_1x_2+y_1y_2=&(my_1+1)(my_2+1)+y_1y_2=\\&(m^2+1)y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=\\&\frac{(m^2+1)(b^2-a^2b^2)}{a^2+b^2m^2}-\frac{2b^2m^2}{a^2+b^2m^2}+1=\\&\frac{-m^2a^2b^2+b^2-a^2b^2+a^2}{a^2+b^2m^2}<0\end{aligned}$$

又 $a^2+b^2m^2>0$,所以 $-m^2a^2b^2+b^2-a^2b^2+a^2<0$,对 $m\in\mathbf{R}$ 恒成立.即 $a^2b^2m^2>a^2-a^2b^2+b^2$ 对 $m\in\mathbf{R}$ 恒成立.当 $m\in\mathbf{R}$ 时,$a^2b^2m^2$ 的最小值为 0,所以 $a^2-a^2b^2+b^2<0$,$a^2<a^2b^2-b^2$,$a^2<(a^2-1)b^2=b^4$,因为 $a>0$,$b>0$,所以 $a<b^2$,即 $a<a^2-1$,$a^2-a-1>0$,解得 $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或 $a<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去),所以 $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.综上,a 的取值范围为$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

(四)涉及直线与线段、直线与曲线相交的问题

1.涉及直线与线段相交的问题常用到截比定理(如例 8).

2.涉及直线与曲线相交的问题常用到如下的解题技巧.

设过点 M 的直线与曲线相交于 A，B 两点，则 M，A，B 三点共线，于是 $\overrightarrow{MA}/\!/\overrightarrow{MB}$. 然后利用共线向量充要条件通过向量的坐标运算（或设 $\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{MB}$）或利用定比分点坐标公式求出坐标间的关系（如例 9、例 10），再利用 A，B 坐标满足曲线方程来解. 当出现一元二次方程时还常要用到根的判别式和韦达定理（如例 12）.

注意 此技巧很有用，只要题目有中出现这种图形（即三点共线的情形），就可以考虑利用上述技巧来帮助解题（如例 11、例 12）.

例 8 若直线 $y=-kx-2$ 与联结 $P(-2,1)$，$Q(3,2)$ 两点的线段有公共点，求实数 k 的取值范围.

解 当直线 $kx+y+2=0$ 过点 P 时，$k(-2)+1+2=0$，$k=\frac{3}{2}$；直线过点 Q 时，$k=-\frac{4}{3}$.

当直线与线段的交点 M 在点 P，点 Q 之间时，设点 M 分 $\overrightarrow{PQ}$ 的比为 λ，则

$$\lambda=-\frac{k(-2)+1+2}{k\cdot 3+2+2}=\frac{2k-3}{3k+4}$$

由 M 在线段 PQ 上，所以 $\lambda>0$，即 $\frac{2k-3}{3k+4}>0$，即 $k<-\frac{4}{3}$ 或 $k>-\frac{3}{2}$. 故 $k\leqslant-\frac{4}{3}$ 或 $k\geqslant\frac{3}{2}$ 为所求 k 的取值范围.

* **例 9** [1999·全国高中数学竞赛题]已知点 $A(1,2)$，过点 $D(5,-2)$ 的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于 B，C 两点，试判断△ABC 的形状.

解 设 B，C 的坐标分别为 $(t^2,2t)$，$(s^2,2s)$，其中 $s\neq t$，$s\neq 1$，$t\neq 1$，因为 B，D，C 三点共线，所以 $\overrightarrow{DB}/\!/\overrightarrow{DC}$，而

$$\overrightarrow{DB}=(t^2-5,2t+2),\quad \overrightarrow{DC}=(s^2-5,2s+2)$$

所以
$$(t^2-5)(2s+2)-(s^2-5)(2t+2)=0$$

化简得

$$ts+t+s+5=0$$

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=&(t^2-1,2t-2)\cdot(s^2-1,2s-2)=\\&(t^2-1)(s^2-1)+(2t-2)(2s-2)=\\&(t-1)(s-1)[(t+1)(s+1)+4]=\\&(t-1)(s-1)(ts+t+s+5)=0\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，即△$ABC$ 为直角三角形.

例 10 [2001·北京春文理三(22)]已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，若有过动点 $M(a,0)$ 且斜率为 1 的直线 l 与该抛物线交于不同的两点 A，B，$|AB|\leqslant 2p$.

求 a 的取值范围.

解 如图 7.54,设 $A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$,$B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$,则

$$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{y_2^2-y_1^2}{2p},y_2-y_1\right)$$

$$\overrightarrow{MA}=\left(\frac{y_1^2}{2p}-a,y_1\right),\quad \overrightarrow{MB}=\left(\frac{y_2^2}{2p}-a,y_2\right)$$

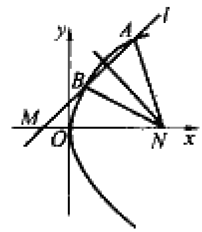


图 7.54

因为$\overrightarrow{MB}$与$\overrightarrow{MA}$共线,所以

$$\left(\frac{y_1^2}{2p}-a\right)y_2-\left(\frac{y_2^2}{2p}-a\right)y_1=0$$

$$y_1^2y_2-y_2^2y_1-2pa(y_2-y_1)=0$$

$$y_1y_2(y_1-y_2)-2pa(y_2-y_1)=0$$

$$(y_1-y_2)(y_1y_2+2pa)=0$$

因为 $y_1\neq y_2$,所以

$$y_1y_2=-2pa$$

又因为 $k_l=1$,所以

$$\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}=1$$

可得 $y_1+y_2=2p$,所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{2}|y_1-y_2|=$$

$$\sqrt{2(y_1+y_2)^2-8y_1y_2}=\sqrt{8p^2+16pa}$$

令 $0<|AB|\leqslant 2p$,即

$$\sqrt{8p^2+16pa}\leqslant 2p,\quad 0<8p^2+16pa\leqslant 4p^2$$

所以 $-\frac{p}{2}<a\leqslant-\frac{p}{4}$.

例 11 如图 7.55,过点 $P(2,1)$作直线 l 分别交 x 轴,y 轴的正半轴于 A 和 B 两点,求$\triangle AOB$(O 为原点)的面积 S 的最小值,并求此时直线 l 的方程.

解 设 $A(a,0)$,$B(0,b)$,显然 $a>2$,$b>1$. 则 $\overrightarrow{PA}=(a-2,-1)$,$\overrightarrow{PB}=(-2,b-1)$. 因为 P,A,B 三点共线,所以可设$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}(\lambda\neq 0)$,即

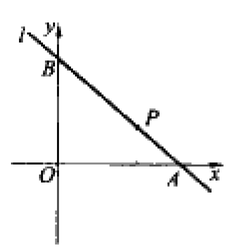


图 7.55

$$\begin{cases} a-2=-2\lambda & ① \\ -1=\lambda(b-1) & ② \end{cases}$$

由式①,式②得

$$ab=a+2b$$

又因为 $S=\frac{1}{2}ab$,所以

$$2S=ab=a+2b\geqslant 2\sqrt{a\cdot 2b}=2\sqrt{4S}=4\sqrt{S},\quad S\geqslant 2\sqrt{S}$$

所以 $S\geqslant 4$,则面积最小值为 4,当且仅当 $a=2b$ 时取"="号,这时由 $ab=a+2b$ 得 $a=4,b=2$. l 方程为:$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$,即 $x+2y-4=0$.

例 12 如图 7.56,已知抛物线 $C:y=-x^2+mx-1$,点 $A(3,0)$,$B(0,3)$,若抛物线 C 与线段 AB 有两个不同的交点,求实数 m 的取值范围.

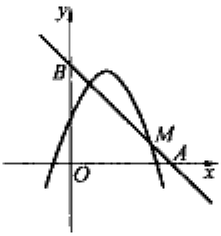


图 7.56

解 设 $M(x,y)$ 是抛物线 C 与线段 AB 的交点,因为 A,M,B 三点共线,所以可设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$,则 $\lambda\geqslant 0$. 由定比分点公式得 $x=\frac{3}{1+\lambda}$,$y=\frac{3\lambda}{1+\lambda}$,因为点 M 在抛物线 C 上,所以

$$\frac{3\lambda}{1+\lambda}=-\left(\frac{3}{1+\lambda}\right)^2+m\cdot\frac{3}{1+\lambda}-1$$

即

$$4\lambda^2+(5-3m)\lambda+10-3m=0$$

该方程有两个相异的非负实根(λ_1,λ_2)的充要条件是 $\begin{cases}\Delta>0\\ \lambda_1+\lambda_2>0\\ \lambda_1\lambda_2\geqslant 0\end{cases}$,即

$$\begin{cases}(5-3m)^2-16(10-3m)>0\\ -\frac{5-3m}{4}>0\\ \frac{10-3m}{4}\geqslant 0\end{cases}$$,解得 $3<m\leqslant\frac{10}{3}$.

(五)涉及平行、三点共线的问题

涉及平行、三点共线的问题常利用共线向量的充要条件来帮助解题,且常要用到相似三角形性质(对应边成比例).

设 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$,$\overrightarrow{CD}=(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$(或对应坐标成比例).

例 13　[2006·北京理二(11)]若三点 $A(2,c)$，$B(a,0)$，$C(0,b)$（$ab\neq0$）共线，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的值等于________.

解　$\overrightarrow{AB}=(a-2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,b-2)$，因为$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，所以$(a-2)\cdot(b-2)-(-2)(-2)=0$，即 $ab-2a-2b=0$，$1-\frac{2}{b}-\frac{2}{a}=0$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$.

例 14　[2001·广东文、理三(21)]如图 7.57，已知椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右准线 l 与 x 轴相交于点 E，过椭圆右焦点 F 的直线与椭圆相交于 A，B 两点，点 C 在右准线 l 上，且 $BC/\!/x$ 轴，求证直线 AC 经过线段 EF 的中点.

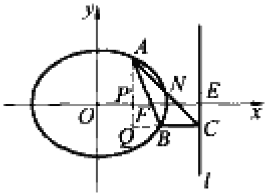


图 7.57

证明　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$F(1,0)$，$l:x=2$，因为 $BC/\!/x$ 轴，所以 $C(2,y_2)$，设 EF 中点为 N，则 $N(\frac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{NA}=(x_1-\frac{3}{2},y_1)$，$\overrightarrow{NC}=(\frac{1}{2},y_2)$，则

$$\left(x_1-\frac{3}{2}\right)y_2-\frac{1}{2}y_1=x_1y_2-\frac{3}{2}y_2-\frac{1}{2}y_1$$

过点 A 作 $AP\perp x$ 轴（点 P 为垂足），与 CB 延长线交于点 Q，因为$\frac{|PN|}{|QC|}=\frac{|AP|}{|AQ|}$，所以

$$\frac{\frac{3}{2}-x_1}{2-x_1}=\frac{y_1}{y_1-y_2}$$

$$\frac{3}{2}y_1-\frac{3}{2}y_2-(y_1-y_2)x_1=2y_1-x_1y_1$$

$$x_1y_2-\frac{1}{2}y_1-\frac{3}{2}y_2=0$$

所以$\overrightarrow{NA}/\!/\overrightarrow{NC}$，即 A，N，C 三点共线，即 AC 经过线段 EF 的中点.

例 15　如图 7.58，过点 $A(-1,0)$斜率为 k 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于P，Q 两点，若曲线 C 的焦点 F 与 P，Q，R 三点按图中顺序构成平行四边形，求点 R 的轨迹方程.

解　设 P，Q，R 三点坐标分别为$\left(\frac{1}{4}y_1^2,y_1\right)$，$\left(\frac{1}{4}y_2^2,y_2\right)$，$(x,y)$，则有

$$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{4}y_1^2+1,y_1\right),\quad \overrightarrow{AQ}=\left(\frac{1}{4}y_2^2+1,y_2\right)$$

$$\overrightarrow{FP}=\left(\frac{1}{4}y_1^2-1,y_1\right),\quad \overrightarrow{QR}=\left(x-\frac{1}{4}y_2^2,y-y_2\right)$$

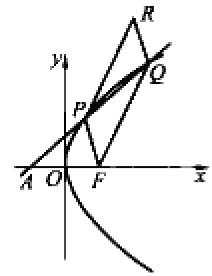


图 7.58

由 A,P,Q 三点共线知$\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{AQ}$,所以

$$\left(\frac{1}{4}y_1^2+1\right)y_2=y_1\left(\frac{1}{4}y_2^2+1\right)$$

即

$$\frac{1}{4}y_1y_2(y_1-y_2)=y_1-y_2$$

所以 $y_1\neq y_2,y_1y_2=4$.

由四边形 $PFQR$ 为平行四边形可知$\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{QR}$,所以

$$\left(\frac{1}{4}y_1^2-1,y_1\right)=\left(x-\frac{1}{4}y_2^2,y-y_2\right)$$

$$x=\frac{1}{4}(y_1^2+y_2^2)-1=\frac{1}{4}[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2]-1=\frac{1}{4}(y_1+y_2)^2-3$$

因为 $y=y_1+y_2$,所以

$$y^2=4x+12$$

又

$$x=\frac{1}{4}(y_1^2+y_2^2)-1>\frac{1}{4}y_1y_2-1=1$$

所以点 R 的轨迹方程是 $y^2=4x+12(x>1)$.

(六)涉及点与圆的位置关系问题

涉及点与圆的位置关系问题常转化为角的问题来处理.

设 AB 为圆 O 的直径,点 M 为动点,则 M 在圆 O 内$\Leftrightarrow\angle AMB$ 为钝角$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}<0$;$M$ 在圆 O 外$\Leftrightarrow\angle AMB$ 为锐角$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}>0$;$M$ 在圆 O 上(或圆 O 过点 M)$\Leftrightarrow\angle AMB$ 为直角$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

例 16 [2006·湖北理三(20)、文三(21)]如图 7.59,设 A,B 分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点,椭圆长半轴的长等于焦距,且 $x=4$ 为它的右准线.

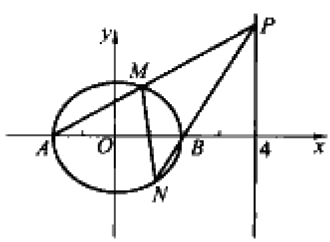


图 7.59

(1)求椭圆的方程;

(2)设 P 为右准线上不同于点(4,0)的任意一点,若直线 AP,BP 分别与椭圆相交于异于 A,

B 的点 M,N,证明点 B 在以 MN 为直径的圆内.

解　(1)椭圆方程为:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,证法略.

(2)**证一**　由(1)得 $A(-2,0)$,$B(2,0)$.设 $P(4,\lambda)(\lambda\neq0)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则直线 AP 的方程为

$$y=\frac{\lambda}{6}(x+2)$$

直线 BP 的方程为

$$y=\frac{\lambda}{2}(x-2)$$

由$\begin{cases}y=\frac{\lambda}{6}(x+2)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y 得

$$(27+\lambda^2)x^2+4\lambda^2x+(4\lambda^2-27)=0$$

因为 $x=-2,x=x_1$ 是方程的两根,所以

$$-2x_1=\frac{4(\lambda^2-27)}{\lambda^2+27}$$

即

$$x_1=\frac{2(27-\lambda^2)}{\lambda^2+27}$$

因为点 M,N 分别在直线 AP,BP 上,所以

$$y_1=\frac{\lambda}{6}(x_1+2),\quad y_2=\frac{\lambda}{2}(x_2-2)$$

从而

$$y_1y_2=\frac{\lambda^2}{12}(x_1+2)(x_2-2)$$

又

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=(x_1-2,y_1)(x_2-2,y_2)=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=\frac{-4\lambda^2}{\lambda^2+27}(x_2-2)+\frac{9\lambda^2}{\lambda^2+27}(x_2-2)=\frac{5\lambda^2}{\lambda^2+27}(x_2-2)$$

因为点 N 在椭圆上且异于顶点 A,B,所以 $x_2-2<0$.又因为 $\lambda\neq0$,所以 $\frac{5\lambda^2}{\lambda^2+27}>0$.从而 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}<0$,所以$\angle MBN$ 为钝角,则点 B 在以 MN 为直径的圆内.

证二　同证一求得 $x_1=\frac{2(27-\lambda^2)}{\lambda^2+27}$.因为点 M 在直线 AP 上,所以

$$y_1=\frac{\lambda}{6}(x_1+2)=\frac{18\lambda}{\lambda^2+27}$$

同理可求得

$$x_2=\frac{2(\lambda^2-3)}{\lambda^2+3},\quad y_2=\frac{-6\lambda}{\lambda^2+3}$$

又

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=\frac{-4\lambda^2}{\lambda^2+27}\frac{-12}{\lambda^2+3}+\frac{18\lambda}{\lambda^2+27}\frac{-6\lambda}{\lambda^2+3}=$$

$$\frac{-60\lambda^2}{(\lambda^2+27)(\lambda^2+3)}<0$$

所以$\angle MBN$为钝角，则点B在以MN为直径的圆内．

例 17 ［2007·山东理三(21)、文三(22)］已知椭圆C的中心在坐标原点，焦点在x轴上，椭圆C上的点到焦点距离的最大值为3，最小值为1．

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)若直线$l:y=kx+m$与椭圆C相交于A,B两点(A,B不是左右顶点)，且以AB为直径的圆过椭圆C的右顶点．

①求证：直线l过定点；

②求出该定点的坐标．

解 (1)椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，解法略．

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去$y$并整理得

$$(3+4k^2)x^2+8mkx+4(m^2-3)=0$$

则

$$\Delta=64m^2k^2-16(3+4k^2)(m^2-3)>0$$

即

$$3+4k^2-m^2>0$$

且

$$x_1+x_2=-\frac{8mk}{3+4k^2},\quad x_1\cdot x_2=\frac{4(m^2-3)}{3+4k^2}$$

又

$$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=$$

$$k^2\frac{4(m^2-3)}{3+4k^2}+mk\left(-\frac{8mk}{3+4k^2}\right)+m^2=\frac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}$$

因为以AB为直径的圆过椭圆的右顶点$D(2,0)$，所以$\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{DB}$，则

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(x_1-2,y_1)\cdot(x_2-2,y_2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=0$$

即

$$\frac{4(m^2-3)}{3+4k^2}+2\times\frac{8mk}{3+4k^2}+4+\frac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}=0.7m^2+16mk+4k^2=0$$

解得 $m_1=-2k,m_2=-\frac{2k}{7}$，且均满足 $3+4k^2-m^2>0$.

当 $m_1=-2k$ 时，l 的方程为 $y=k(x-2)$，直线过定点 $(2,0)$，与已知矛盾.

当 $m_2=-\frac{2k}{7}$ 时，l 的方程为 $y=k(x-\frac{2}{7})$，直线过定点 $(\frac{2}{7},0)$，所以直线 l 过定点，定点坐标为 $(\frac{2}{7},0)$.

例 18　[2005·湖北理三(21)、文三(22)]设 A,B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点，点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点，线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C,D 两点.

(1)确定 λ 的取值范围，并求直线 AB 的方程；

(2)试判断是否存在这样的 λ，使得 A,B,C,D 四点在同一个圆上？并说明理由.

(注：此题与 2002 广东文理三(20)类似)

解　(1)$\lambda\in(12,+\infty)$. 直线 AB 的方程为 $x+y-4=0$，解法略.

(2)由 $\begin{cases}x+y-4=0\\3x^2+y^2=\lambda\end{cases}$，消去 y 并整理得

$$4x^2-8x+16-\lambda=0 \qquad ①$$

解得 $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{\lambda-12}}{2}$，因为 $\lambda>12$，所以该解有意义，且 $y_{1,2}=\frac{6\mp\sqrt{\lambda-12}}{2}$. 不妨设

$$A\left(\frac{2+\sqrt{\lambda-12}}{2},\frac{6-\sqrt{\lambda-12}}{2}\right),\quad B\left(\frac{2-\sqrt{\lambda-12}}{2},\frac{6+\sqrt{\lambda-12}}{2}\right)$$

则 AB 中垂线方程为

$$x-y+2=0$$

同样由 $\begin{cases}x-y+2=0\\3x^2+y^2=\lambda\end{cases}$，消去 y 并整理得

$$4x^2+4x+4-\lambda=0$$

解得 $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{\lambda-3}}{2}$，于是 $y_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{\lambda-3}}{2}$，不妨设

$$C\left(\frac{-1-\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3-\sqrt{\lambda-3}}{2}\right),\quad D\left(\frac{-1+\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3+\sqrt{\lambda-3}}{2}\right)$$

所以

$$\overrightarrow{CA}=\left(\frac{3+\sqrt{\lambda-12}+\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3+\sqrt{\lambda-3}+\sqrt{\lambda-12}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{DA}=\left(\frac{3+\sqrt{\lambda-12}-\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3-\sqrt{\lambda-3}-\sqrt{\lambda-12}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DA}=\frac{(3+\sqrt{\lambda-12})+\sqrt{\lambda-3}}{2}\cdot\frac{(3+\sqrt{\lambda-12})-\sqrt{\lambda-3}}{2}+$$

$$\frac{(3-\sqrt{\lambda-12})+\sqrt{\lambda-3}}{2}\cdot\frac{(3-\sqrt{\lambda-12})-\sqrt{\lambda-3}}{2}=$$

$$\frac{(9+\lambda-12+6\sqrt{\lambda-12})-(\lambda-3)}{4}+\frac{(9+\lambda-12-6\sqrt{\lambda-12})-(\lambda-3)}{4}=$$

$$\frac{3\sqrt{\lambda-12}}{2}-\frac{3\sqrt{\lambda-12}}{2}=0$$

所以点 A 在以 CD 为直径的圆上，又因为点 B 为点 A 关于 CD 的对称点，所以 A,B,C,D 四点共圆.

(七)涉及线段比或几等分的问题

涉及线段比或几等分的问题常转成共线向量(若点 A,B,C,D 在同一直线上，且 $\frac{AB}{CD}=\lambda$，则 $\overrightarrow{AB}=\pm\lambda\overrightarrow{CD}$)或设出比值，利用定比分点坐标公式或通过向量运算求出点的坐标，且常采用投影的方法，将线段比转化为某直线(如数轴)上线段的数量比(这样仅与横坐标或纵坐标联系)或利用相似三角形的性质将所求线段比转化(如例 20).

例 19 [2004·广东文理三(22)]如图 7.60，设直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 相交于 A,B 两点，直线 l 又与双曲线 $x^2-y^2=1$ 相交于 C,D 两点，C,D 三等分线段 AB，求直线 l 的方程.

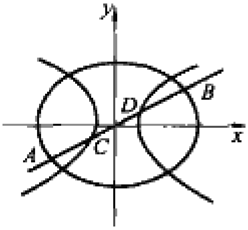


图 7.60

解 当直线 l 不与 x 轴垂直时，设直线 l 的方程为 $y=kx+b$. 直线 l 与椭圆、双曲线的交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$. 依题意有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB},\quad \overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$$

由$\begin{cases} y = kx + b \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$,得

$$(16 + 25k^2)x^2 + 50kbx + (25b^2 - 400) = 0 \qquad ①$$

所以

$$x_1 + x_2 = -\frac{50bk}{16 + 25k^2}$$

由$\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$,得

$$(1 - k^2)x^2 - 2bkx - (b^2 + 1) = 0 \qquad ②$$

若 $k = \pm 1$,则直线与双曲线最多只有一个交点,不合题意,所以 $k \neq \pm 1$,则

$$x_3 + x_4 = \frac{2bk}{1 - k^2}$$

由$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$得

$$x_3 - x_1 = x_2 - x_4, \quad x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

所以

$$-\frac{50bk}{16 + 25k^2} = \frac{2bk}{1 - k^2}, \quad bk = 0$$

所以 $b = 0$ 或 $k = 0$.

若 $k = 0$,由式①得

$$x_{1,2} = \pm \frac{5}{4}\sqrt{16 - b^2}$$

由式②得

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{b^2 + 1}$$

由$\overrightarrow{AB} = 3\ \overrightarrow{CD}$得

$$x_2 - x_1 = 3(x_4 - x_3)$$

即

$$\frac{10}{4}\sqrt{16 - b^2} = 6\sqrt{b^2 + 1}$$

解得 $b = \pm \dfrac{16}{13}$.故直线 l 的方程为 $y = \pm \dfrac{16}{13}$.

若 $b = 0$,由式①得

$$x_{1,2} = \pm \frac{20}{\sqrt{16 + 25k^2}}$$

由式②得

$$x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$$

由$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$得

$$x_2-x_1=3(x_4-x_3)$$

即

$$\frac{40}{\sqrt{16+25k^2}}=\frac{6}{\sqrt{1-k^2}}$$

解得 $k=\pm\frac{16}{25}$,故直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{16}{25}x$.

当直线 l 与 x 轴垂直时,设直线 l 方程为 $x=m$,分别代入椭圆和双曲线方程可解得

$$y_{1,2}=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-m^2},\quad y_{3,4}=\pm\sqrt{m^2-1}$$

由$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$,得

$$y_2-y_1=3(y_4-y_3)$$

即

$$\frac{8}{5}\sqrt{25-m^2}=6\sqrt{m^2-1}$$

解得 $m=\pm\frac{25\sqrt{241}}{241}$.故直线 l 的方程为 $x=\pm\frac{25\sqrt{241}}{241}$.综上所述,直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{16}{13}$,$y=\pm\frac{16}{25}x$ 或 $x=\pm\frac{25\sqrt{241}}{241}$.

例 20 [2008·安徽理三(22)]设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.过点 $M(\sqrt{2},1)$,且左焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)当过点 $P(4,1)$的动直线 l 与椭圆 C 相交于两不同点 A,B 时,在线段 AB 上取上取点 Q,满足$|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}||\overrightarrow{PB}|$.证明:点 Q 总在某定直线上.

解 (1)椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,解法略.

(2)设点 Q,A,B 的坐标分别为(x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2).由题设知$|\overrightarrow{AP}|$,$|\overrightarrow{PB}|$,$|\overrightarrow{AQ}|$,$|\overrightarrow{QB}|$均不为零,记$\lambda=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$,则 $\lambda>0$,且 $\lambda\neq1$.又 A,P,B,Q 四点共线,从而$\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB}$,$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$,于是

$$\begin{cases}4=\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}\\ 1=\dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}\end{cases},\quad \begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$$

相乘得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2-\lambda^2x_2^2}{1-\lambda^2}=4x & ①\\ \dfrac{y_1^2-\lambda^2y_2^2}{1-\lambda^2}=y & ②\end{cases}$$

又点 A,B 在椭圆 C 上,即

$$\begin{cases}x_1^2+2y_1^2=4 & ③\\ x_2^2+2y_2^2=4 & ④\end{cases}$$

①+2×②并结合式③,式④得

$$4x+2y=4$$

即

$$2x+y-2=0$$

因此点 $Q(x,y)$ 总在定直线 $2x+y-2=0$ 上.

***例 21**　[2003·全国理三(21)、文三(22)、广东文理三(21)]如图 7.61,已知常数 $a>0$,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$BC=4a$,O 为 AB 的中点,点 E,F,G 分别在 BC,CD,DA 上移动,且 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{DG}{DA}$,点 P 为 GE 与 OF 的交点,问是否存在两个定点,使点 P 到这两点的距离的和为定值?若存在,求出这两点的坐标及此定值,若不存在,请说明理由.

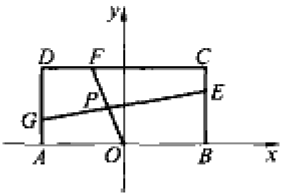


图 7.61

解　依题意有 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,$C(2,4a)$,$D(-2,4a)$,设

$$\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$$

则

$$E(2,4a\lambda),\quad F(2-4\lambda,4a),\quad G(-2,4a-4a\lambda)$$

又令 $P(x,y)$,则

$$\overrightarrow{OP}=(x,y),\quad \overrightarrow{OF}=(2-4\lambda,4a)$$
$$\overrightarrow{GP}=(x+2,y-4a+4a\lambda),\quad \overrightarrow{GE}=(4,8a\lambda-4a)$$

因为 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OF}$ 共线,所以

$$4ax-(2-4\lambda)y=0$$

即

$$2ax=(1-2\lambda)y \qquad ①$$

又$\overrightarrow{GP}$与$\overrightarrow{GE}$共线，所以

$$4(y-4a+4a\lambda)-(x+2)(8a\lambda-4a)=0$$

即

$$2a-y(1-2\lambda)ax \qquad ②$$

由$\frac{①}{②}$得

$$\frac{2ax}{2a-y}=\frac{y}{ax},\quad 2a^2x^2+(y-a)^2=a^2,\quad \frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(y-a)^2}{a^2}=1$$

当 $a^2=\frac{1}{2}$时，点 P 的轨迹为圆弧，所以不存在符合题意的两点；当 $a^2\neq\frac{1}{2}$时，点 P 的轨迹为椭圆的一部分，点 P 到该椭圆焦点的距离的和为定长；当 $a^2<\frac{1}{2}$时，点 P 到椭圆两个焦点$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a\right)$，$\left(\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a\right)$的距离之和为定值$\sqrt{2}$；当 $a^2>\frac{1}{2}$时，点 P 到椭圆两个焦点$\left(0,a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)$，$\left(0,a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)$的距离之和为定值 $2a$.

*例 22　已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，其定点为 $A(0,3)$，过点 A 的直线自上而下依次交椭圆于 M,N 两个不同点，且$|AN|=\lambda|AM|$，求实数 λ 的取值范围.

解　因为$|AN|=\lambda|AM|$，且 A,M,N 三点共线，所以$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AM}$，且 $\lambda>1$，设点 M 坐标为$(3\cos\theta,2\sin\theta)$，则$\overrightarrow{AM}=(3\cos\theta,2\sin\theta-3)$，所以$\overrightarrow{AN}=(3\lambda\cos\theta,2\lambda\sin\theta-3\lambda)$，则点 N 坐标为$(3\lambda\cos\theta,2\lambda\sin\theta-3\lambda+3)$，因为点 N 在椭圆上，所以

$$\frac{(3\lambda\cos\theta)^2}{9}+\frac{(2\lambda\sin\theta-3\lambda+3)^2}{4}=1$$

即

$$12\lambda(1-\lambda)\sin\theta+13\lambda^2-18\lambda+5=0$$

$$\sin\theta=\frac{13\lambda^2-18\lambda+5}{12\lambda(\lambda-1)}$$

因为$-1\leqslant\sin\theta\leqslant1$，所以

$$-1\leqslant\frac{13\lambda^2-18\lambda+5}{12\lambda(\lambda-1)}\leqslant1,\quad -12\lambda(\lambda-1)\leqslant13\lambda^2-18\lambda+5\leqslant12\lambda(\lambda-1)$$

解

$$-12\lambda(\lambda-1)\leqslant 13\lambda^2-18\lambda+5$$

得 $\lambda\leqslant\frac{1}{5}$ 或 $\lambda\geqslant 1$. 解

$$13\lambda^2-18\lambda+5\leqslant 12\lambda(\lambda-1)$$

得 $1\leqslant\lambda\leqslant 5$. 综上, $1<\lambda\leqslant 5$.

* **例 23**　如图 7.62, 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线为 l_1,l_2, 过椭圆 C 的右焦点 F 作直线 l, 使 $l\perp l_1$, 又 l 与 l_2 交于点 P, 设直线 l 与椭圆 C 的两交点从左到右依次为 B,A, 求 $\frac{|PB|}{|PA|}$ 的最大值及取得最大值时椭圆 C 的离心率 e 的值.

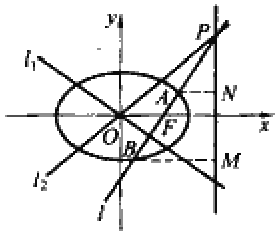


图 7.62

解　设椭圆 C 的半焦距为 C, 由对称性不妨设 $l_1: y=-\frac{b}{a}x$, $l_2: y=\frac{b}{a}x$, 因为 $l\perp l_1$, 所以直线 l 的方程为 $y=\frac{a}{b}(x-c)$, 解 $\begin{cases} y=\frac{b}{a}x \\ y=\frac{a}{b}(x-c) \end{cases}$, 得点 $P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$, 故 P 在椭圆的右准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上.

设 $\frac{|PB|}{|PA|}=t$, 分别过 A,B 作椭圆 C 右准线的垂线, 垂足分别为点 N,M, 因为 $AN/\!/BM$, 所以

$$\frac{|BM|}{|AN|}=\frac{|PB|}{|PA|}=t$$

因为 $\frac{|AF|}{|AN|}=e$, $\frac{|BF|}{|BM|}=e$, 所以

$$\frac{|BF|}{|AF|}=\frac{|BM|}{|AN|}=t$$

因为

$$|AB|=|AF|+|BF|=(1+t)|AF|$$
$$|AB|=|PB|-|PA|=(t-1)|PA|$$

所以

$$(1+t)|AF|=(t-1)|PA|,\quad \frac{|FA|}{|AP|}=\frac{t-1}{t+1}$$

设$\frac{t-1}{t+1}=\lambda$，即点 A 内分有线段$\overrightarrow{FP}$的比为λ，由定比分点坐标公式得

$$\begin{cases} x_A=\dfrac{c+\lambda\dfrac{a^2}{c}}{1+\lambda} \\ y_A=\dfrac{\lambda\dfrac{ab}{c}}{1+\lambda} \end{cases}$$

因为点 A 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上，将点 $A(x_A,y_A)$代入椭圆方程并化简得

$$(c^2+\lambda a^2)^2+\lambda^2a^4=a^2c^2(1+\lambda)^2$$

两边同除以 a^4，因为 $e=\frac{c}{a}$，所以

$$(e^2+\lambda)^2+\lambda^2=e^2(1+\lambda)^2$$

解得

$$\lambda^2=\frac{e^2-e^4}{2-e^2}=-\frac{e^4-e^2}{2-e^2}=-\frac{(e^4-4e^2+4)+3e^2-4}{2-e^2}=$$

$$-2(2-e^2)\frac{3(e^2-2)+2}{2-e^2}=-\left[(2-e^2)+\frac{2}{2-e^2}\right]+3\leqslant$$

$$-2\sqrt{(2-e^2)\frac{2}{2-e^2}}+3=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$$

当且仅当 $2-e^2=\frac{2}{2-e^2}$，即 $2-e^2=\sqrt{2}$，$e^2=2-\sqrt{2}$时，则 $\lambda_{\max}=\sqrt{2}-1$，于是 $\frac{t-1}{t+1}\leqslant\sqrt{2}-1$，解得 $t\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$，即 $t\leqslant\sqrt{2}+1$. 因此$\frac{|PB|}{|PA|}$的最大值为$\sqrt{2}+1$，此时椭圆 C 的离心率$e=\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(八)涉及绕点旋转及共始点的两线段长、角度有确定关系问题

绕点旋转或可化为绕点旋转(如直角三角形、矩形)的问题及解析几何中共始点的两线段长、角度有确定关系的问题，常借助向量旋转(有时还须将模伸缩)来帮助解题，这时要用到如下的结论.

已知对任意平面向量$\overrightarrow{AB}=(x,y)$，把$\overrightarrow{AB}$绕其起点沿逆时针方向旋转$\theta$ 角得到向量$\overrightarrow{AP}$，则$\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$. 若沿顺时针方向旋转 θ 角得到向量$\overrightarrow{AQ}$，则$\overrightarrow{AQ}=(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta)$.

特别地，若 $\theta=90°$，则$\overrightarrow{AP}=(-y,x)$，$\overrightarrow{AQ}=(y,-x)$，如图 7.63 所示.

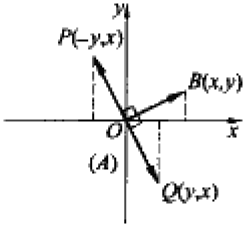


图 7.63

例 24 单位圆 $x^2+y^2=1$ 上一动点 Q 与定点 $A(2,$

0)联结,延长到点 R,使点 A 为线段 QR 的中点,同时把半径 $\overrightarrow{OQ}$ 绕点 O 旋转(逆时针方向)90°到 $\overrightarrow{OP}$ 的位置,求线段 PR 长度的最大值和最小值.

解　设 $Q(\cos\theta,\sin\theta)$,则 $P(-\sin\theta,\cos\theta)$,$\overrightarrow{OA}=(2-\cos\theta,-\sin\theta)$,因为点 A 为 QR 中点,所以

$$\overrightarrow{QR}=2\overrightarrow{QA}=(4-2\cos\theta,-2\sin\theta)$$

则

$$R(4-\cos\theta,-\sin\theta)$$

$$\overrightarrow{PR}=(4-\cos\theta+\sin\theta,-\sin\theta-\cos\theta)$$

所以

$$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{(4-\cos\theta+\sin\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta)^2}=$$

$$\sqrt{18-8(\cos\theta-\sin\theta)}=\sqrt{18-8\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

则当 $Q=\frac{3\pi}{4}$ 时,$|PR|$ 达到最大值 $\sqrt{18+8\sqrt{2}}=4+\sqrt{2}$;当 $\theta=\frac{7\pi}{4}$ 时,$|PR|$ 达到最小值 $\sqrt{18-8\sqrt{2}}=4-\sqrt{2}$.

例 25　如图 7.64,已知抛物线 $y=x^2$ 上的三点 A,B,C 组成一个等腰直角三角形且顶点 B 是直角.

(1)若直线 BC 的斜率为 $k(k>0)$,求顶点 B 的横坐标;

(2)当直线 BC 的斜率 $k(k>0)$变化时,求等腰直角三角形面积的最小值.

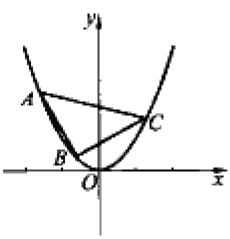


图 7.64

解　(1)设 $B(x_0,x_0^2)$,$C(x_1,x_1^2)$,因为 $k=\frac{x_1^2-x_0^2}{x_1-x_0}=x_1+x_0$,所以 $x_1=k-x_0$.由于 $\overrightarrow{BC}=(x_1-x_0,x_1^2-x_0^2)$,$\overrightarrow{BA}$ 可由 $\overrightarrow{BC}$ 逆时针旋转 90°而得到,所以 $\overrightarrow{BA}=(x_0^2-x_1^2,x_1-x_0)$,则 $A(x_0^2-x_1^2+x_0,x_1-x_0+x_0^2)$,因为点 A 在抛物线 $y=x^2$ 上,所以

$$x_1-x_0+x_0^2=(x_0^2-x_1^2+x_0)^2$$

将 $x_1=k-x_0$ 代人得

$$k-2x_0+x_0^2=(-k^2+2kx_0+x_0)^2$$

展开整理得

$$4k(k+1)x_0^2-(4k^3+2k^2-2)x_0+k(k^3-1)=0$$

即

$$[2k(k+1)x_0-(k^3-1)][2x_0-k]=0$$

所以 $x_0=\frac{k^3-1}{2k(k+1)}$ 或 $x_0=\frac{k}{2}$(不合题意,因为此时 $x_1=k-x_0=\frac{k}{2}=x_0$).

(2)用导数求最值得,面积的最小值为1,解法略.(当 $k=1$ 时)

例 26 [1994·全国理(24)]如图 7.65,已知直线 l 过坐标原点,抛物线 C 的顶点在原点上,焦点在 x 轴正半轴上,若点 $A(-1,0)$ 和 $B(0,8)$ 关于 l 的对称点在 C 上,求直线 l 和抛物线 C 的方程.

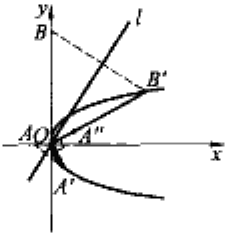


图 7.65

解 设抛物线方程为 $y^2=2px$. 点 A,B 关于直线 l 的对称点设为 A',B'. 因为 $\angle AOB=90°$,所以 $\angle A'OB'=90°$,且 $|OA'|=|OA|=1$, $|OB'|=|OB|=8$. 又设 $A'\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$,则 $\overrightarrow{OA'}=\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$,设 $\overrightarrow{OA'}$ 逆时针旋转 $90°$ 得到的向量为 $\overrightarrow{OA''}$,则 $\overrightarrow{OA''}=\left(-y_1,\frac{y_1^2}{2p}\right)$, $|\overrightarrow{OA''}|=|\overrightarrow{OA'}|=1$,所以 $\overrightarrow{OB'}=8\ \overrightarrow{OA''}=\left(-8y_1,\frac{8y_1^2}{2p}\right)$,则 $B'\left(-8y_1,\frac{8y_1^2}{2p}\right)$. 因为点 B' 在 $y^2=2px$ 上,所以 $\left(\frac{8y_1^2}{2p}\right)=2p(-8y_1)$. 因为 $p>0$,所以 $y_1=-p$,则 $A'(\frac{p}{2},-p)$.

因为 $|\overrightarrow{OA'}|=1$,所以 $(\frac{p}{2})^2+p^2=1$,解得 $p=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,则 $A'\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,所以抛物线 C 的方程为: $y^2=\frac{4}{5}\sqrt{5}x$. 因为 AA' 中点 $\left(\frac{\sqrt{5}-5}{10},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 在直线 l 上,所以直线 l 的方程为

$$y=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}-5}{10}}x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$$

(九)利用向量法求轨迹方程

求轨迹方程的方法很多,其基本思路是几何问题代数化.常用的基本方法有直接法、定义法、代点法、参数法、交轨法、向量法等.向量法如果运用得好,往往能起到化繁为简、化难为易的作用,凡题设中有符合上面所述可用向量法求解的几种情形的求动点轨迹,方程的问题均可考虑用向量法来求.

注意 涉及圆锥曲线弦中点轨迹的问题常用向量法来解.(如例 26)

例 27 [2002·北京文三(21)]如图 7.66,已知 $O(0,0)$, $B(1,0)$, $C(b,c)$ 是 $\triangle OBC$ 的三个顶点.

(1)写出 $\triangle OBC$ 的重心 G,外心 F,垂心 H 的坐标,并证明 G,F,H 三点共线;

(2)当直线 FH 与 OB 平行时,求顶点 C 的轨迹.

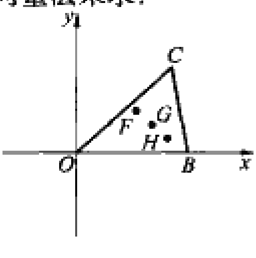


图 7.66

解　(1)由 O,B,C 三顶点坐标 $(0,0),(1,0),(b,c)(c\neq 0)$ 可求得重心 $G\left(\frac{b+1}{3},\frac{c}{3}\right)$，外心 $F\left(\frac{1}{2},\frac{b^2+c^2-b}{2c}\right)$，垂心 $H\left(b,\frac{b-b^2}{c}\right)$. 又

$$\overrightarrow{FG}=\left(\frac{b+1}{3}-\frac{1}{2},\frac{c}{3}-\frac{b^2+c^2-b}{2c}\right)=\left(\frac{2b-1}{6},\frac{-3b^2+3b-c^2}{6c}\right)$$

$$\overrightarrow{FH}=\left(b-\frac{1}{2},\frac{b-b^2}{c}-\frac{b^2+c^2-b}{2c}\right)=\left(\frac{2b-1}{2},\frac{-3b^2+3b-c^2}{2c}\right)$$

因为 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FH}$，所以 G,F,H 三点共线.

(2) $\overrightarrow{OB}=(1,0)$，$\overrightarrow{FH}/\!/\overrightarrow{OB}$，所以

$$\frac{-3b^2+3b-c^2}{2c}=0,\quad \frac{2b-1}{2}\neq 0,\quad 3b^2-3b+c^2=0$$

$$3\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+c^2=\frac{3}{4}\qquad \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{c^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

其中 $b\neq\frac{1}{2}$，$c\neq 0$，设 $C(x,y)$，则顶点 C 的轨迹方程为

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1\quad \left(x\neq\frac{1}{2},y\neq 0\right)$$

因此，顶点 C 的轨迹是中心在 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，长半轴长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，短半轴长为 $\frac{1}{2}$，且短轴在 x 轴上的椭圆，除去 $(0,0),(1,0),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 四点.

例 28　[2008·山东文三(22)]如图 7.67，已知曲线 $c_1:\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}=1(a>b>0)$，所围成的封闭图形的面积为 $4\sqrt{5}$，曲线 c_1 的内切圆半径为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$，记 c_2 为以曲线 c_1 与坐标轴的交点为顶点的椭圆.

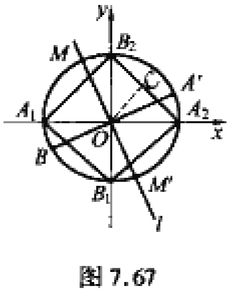


图 7.67

(1)求椭圆 c_2 的标准方程；

(2)设 AB 是过椭圆 c_2 中心的任意弦，l 是线段 AB 的垂直平分线，M 是 l 上异于椭圆中心的点.

①若 $|MO|=\lambda|OA|$（O 为坐标原点），当点 A 在椭圆 c_2 上运动时，求点 M 的轨迹方程；

②若 M 是 l 与椭圆 c_2 的交点，求 $\triangle AMB$ 面积的最小值.

解 (1)曲线 c_1 是菱形 $A_1B_1A_2B_2$. 曲线 c_1 的内切圆半径,即 Rt△A_2OB_2 的高 $|OC|$. 依题意得 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}ab\cdot 4=4\sqrt{5}\\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\end{cases}$,因为 $a>b>0$,所以解得 $a^2=5$, $b^2=4$,则椭圆 c_2 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)①设 $M(x,y)$,则 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$. 设 $\overrightarrow{OM}$ 逆时针或顺时针旋转 90°得到的向量为 $\overrightarrow{OA'}$,则 $\overrightarrow{OA'}=(-y,x)$ 或 $\overrightarrow{OA'}=(y_1-x)$, $|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OM}|$. 因为 $|\overrightarrow{OM}|=\lambda|\overrightarrow{OA}|$,所以

$$|\overrightarrow{OA}|=\frac{1}{\lambda}|\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{\lambda}|\overrightarrow{OA'}|$$

因为 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OA'}$ 共线,所以

$$\overrightarrow{OA}=\pm\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{OA'}=\pm\frac{1}{\lambda}(-y,x)=\pm\left(-\frac{y}{\lambda},\frac{x}{\lambda}\right)$$

或

$$\overrightarrow{OA}=\pm\frac{1}{\lambda}(y,-x)=\pm\left(\frac{y}{\lambda},-\frac{x}{\lambda}\right)=\mp\left(\frac{-y}{\lambda},\frac{x}{\lambda}\right)$$

则 $A=\pm\left(-\dfrac{y}{\lambda},\dfrac{x}{\lambda}\right)$. 因为 A 在椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上,所以 $\dfrac{y^2}{5\lambda^2}+\dfrac{x^2}{4\lambda^2}=1$ 上,即

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=\lambda^2$$

②面积最小值为 $\dfrac{40}{9}$,解法略.

例 29 [2000·北京春文理三(22)]如图 7.68,设点 A 和点 B 为抛物线 $y^2=4px(p>0)$ 上原点以外的两个动点,已知 $OA\perp OB$, $OM\perp AB$,求点 M 的轨迹方程,并说明它表示什么曲线.

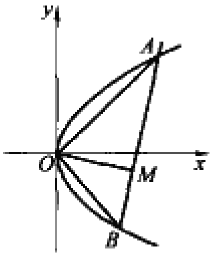


图 7.68

解 设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{4p},y_1\right)$, $B\left(\dfrac{y_2^2}{4p},y_2\right)$, $M(x,y)$,所以 $\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{y_1^2}{4p},y_1\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(\dfrac{y_2^2}{4p},y_2\right)$, $\overrightarrow{OM}=(x,y)$, $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{y_2^2-y_1^2}{4p},y_2-y_1\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(x-\dfrac{y_1^2}{4p},y-y_1\right)$. 因为 $OA\perp OB$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,即

$$\frac{y_1^2}{4p}\frac{y_2^2}{4p}+y_1y_2=0,y_1y_2=-16p^2 \quad ①$$

又因为 $OM\perp AB$,所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,即

$$\frac{y_2^2-y_1^2}{4p}x+(y_2-y_1)y=0$$

$$\frac{y_1+y_2}{4p}x+y=0 \qquad ②$$

又因为 A,M,B 三点共线,所以$\overrightarrow{AM}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}$,即

$$\frac{x-\dfrac{y_1^2}{4p}}{\dfrac{y_2^2-y_1^2}{4p}}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\quad x-\frac{y_1+y_2}{4p}y+\frac{y_1y_2}{4p}=0 \qquad ③$$

把式①,式②代入式③得

$$x^2+y^2-4px=0$$

即

$$(x-2p)^2+y^2=4p^2$$

因为 A,B 是原点以外的两点,所以 $x\neq0$,则点 M 的轨迹是以$(2p,0)$为圆心,$2p$ 为半径的圆(去掉原点).

注意 2007·天津理三(22)与本题类似(将抛物线改为椭圆).

例 30 [1999·全国文理三(24)、广东文理三(22)] 如图 7.69,给出定点 $A(a,0)(a>0)$和直线 $l:x=-1$,B 是直线 l 上的动点,$\angle BOA$ 的角平分交 AB 于点 C,求点 C 的轨迹方程,并讨论方程表示的曲线类型与 a 值的关系.

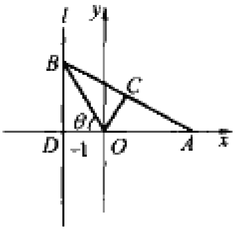


图 7.69

解一(向量法) 设 $B(-1,b)$,$C(x,y)$.$\overrightarrow{OA}=(a,0)$,$\overrightarrow{OC}=(x,y)$,$\overrightarrow{OB}=(-1,b)$.因为 OC 是$\angle AOB$ 是平分线,所以

$$\cos\angle AOC=\cos\angle BOC$$

则

$$\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|}$$

$$a\frac{ax+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-x+by}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

化简得

$$(x^2-y^2)b=-2xy \qquad ①$$

又 A,C,B 三点共线,所以$\overrightarrow{AC}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}$,而$\overrightarrow{AC}=(x-a,y)$,$\overrightarrow{AB}=(-1-a,b)$,则

$\dfrac{x-a}{-1-a}=\dfrac{y}{b}(b\neq0)$,即将 $b=\dfrac{(1+a)}{a-x}$代入式①并化简得

$$(1-a)x^2+(1+a)y^2-2ax=0 \quad (b\neq 0)$$

若 $b=0$，$\angle AOB=180°$，$C(0,0)$也满足上式，所以点 C 的轨迹方程为

$$(1-a)x^2+(1+a)y^2-2ax=0 \quad (0\leqslant x<a)$$

当 $a=1$ 时，轨迹方程为 $y^2=x(0\leqslant x<1)$表示一段抛物线弧；当 $a\neq 1$ 时，轨迹方程为

$$\frac{\left(x-\frac{a}{1-a}\right)^2}{\left(\frac{a}{1-a}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{1-a^2}}=1 \quad (0\leqslant x<a) \qquad ②$$

若 $0<a<1$ 时，方程②表示一般椭圆弧；若 $a>1$，方程②表示一段双曲线弧.

解二 （向量法：利用两直线的夹角平分线方程）设 $B(-1,t)$，则$\overrightarrow{AB}=(-1-a,t)$，从而直线 AB 的方程为

$$\frac{x-a}{-1-a}=\frac{y-0}{t}$$

即

$$(a+1)y=t(a-x) \qquad ①$$

又$\overrightarrow{OA}=(a,0)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,t)$，所以直线 OC 的方向向量为

$$\boldsymbol{m}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=(1,0)+\left(\frac{-1}{\sqrt{1+t^2}},\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}},\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

故直线 OC 的方程为

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}}}=\frac{y}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$$

即

$$(\sqrt{1+t^2}-1)y=tx \qquad ②$$

由式①，式②消去 t 并整理得

$$(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0 \quad (0\leqslant x<a)$$

（以下讨论同解一）

例 31 ［1995·全国理三(26)］如图 7.70，已知椭圆 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$，直线 $l:\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$，$P$ 是直线 l 上的一点，射线 OP 交椭圆于一点 R，点 Q 在 OP 上且满足 $|OQ||OP|=|OR|^2$，当点 P 在直线 l 上移动时，求点 Q 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线.

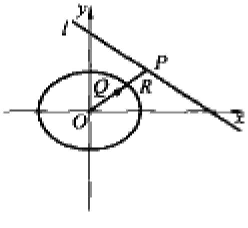


图 7.70

解 因为$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$，$\overrightarrow{OP}$共线，所以可设$\overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OQ}$，

$\overrightarrow{OP}=\mu\overrightarrow{OQ}$，设 $Q(x,y)$，则 $\overrightarrow{OQ}=(x,y)$，$\overrightarrow{OR}=(\lambda x,\lambda y)$，$\overrightarrow{OP}=(\mu x,\mu y)$，将 $|\overrightarrow{OR}|=\lambda|\overrightarrow{OQ}|$，$|\overrightarrow{OP}|=\mu|\overrightarrow{OQ}|$ 代入 $|\overrightarrow{OQ}|\cdot|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OR}|^2$ 得 $\mu|\overrightarrow{OQ}|^2=\lambda^2|OQ|^2$，所以 $\mu=\lambda^2$. 因为点 R 在椭圆上，所以 $\frac{\lambda^2x^2}{24}+\frac{\lambda^2y^2}{16}=1$，即 $\lambda^2\left(\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}\right)=1$，又因为点 P 在直线 l 上，所以

$$\frac{\mu x}{12}+\frac{\mu y}{8}=1 \qquad ①$$

即

$$\mu\left(\frac{x}{12}+\frac{y}{8}\right)=1 \qquad ②$$

$\frac{①}{②}$得

$$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=\frac{x}{12}+\frac{y}{8}$$

整理得

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}}=1 \quad (x^2+y^2\neq 0)$$

因为$\frac{5}{2}>\frac{5}{3}$，所以点 Q 轨迹是焦点在 $y=1$ 上的椭圆.

例 32　如图 7.71，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是抛物线 $x^2=4y$ 上的两点，且 $OA\perp OB$（O 为坐标原点），求弦 AB 中点的轨迹方程.

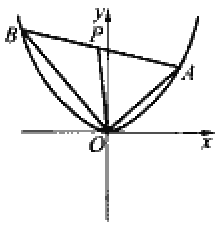


图 7.71

解　因为 $x_1^2=4y_1$，$x_2^2=4y_2$，所以 $\overrightarrow{OA}=(x_1,\frac{x_1^2}{4})$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,\frac{x_2^2}{4})$，因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则 $x_1x_2+\frac{1}{16}(x_1x_2)^2=0$，因为 $x_1x_2\neq 0$，所以 $x_1x_2=-16$. 设弦 AB 的中点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，即

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1^2+y_2^2}{8} \end{cases}$$

则

$$8y=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2x)^2-2x(-16)=4(x^2+8)$$

所以 $2y=x^2+16$，$x^2=2(y-4)$，因此弦 AB 中点的轨迹方程为 $x^2=2(y-4)$.

*例 33 已知点 $A(a,0)$，点 B 在以原点为圆心 b 为半径的圆上移动，以 AB 为一边作正$\triangle ABC$（A,B,C 的顺序为顺时针方向），如图 7.72 所示，求点 C 的轨迹.

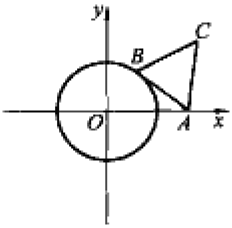


图 7.72

解 设 $C(x,y)$，则$\overrightarrow{AC}=(x-a,y)$，因为$\triangle ABC$ 是等边三角形，所以$\overrightarrow{AB}$可由$\overrightarrow{AC}$逆时针旋转 60°而得到，则

$$\overrightarrow{AB}=((x-a)\cos 60^\circ-y\sin 60^\circ,(x-a)\sin 60^\circ+y\cos 60^\circ)=\left(\frac{x-a-\sqrt{3}y}{2},\frac{\sqrt{3}(x-a)+y}{2}\right)$$

所以 $B\left(\frac{x+a-\sqrt{3}y}{2},\frac{\sqrt{3}(x-a)+y}{2}\right)$. 因为点 B 在圆$x^2+y^2=b^2$ 上，所以

$$\left(\frac{x-\sqrt{3}y+a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}a}{2}\right)=b^2$$

展开整理得

$$x^2+y^2-ax-\sqrt{3}ay+a^2=b^2$$

即

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=b^2$$

因此点 C 的轨迹是以点$\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$为圆心，以 b 为半径的圆.

（十）有关 x^2+y^2 或$\sqrt{x^2+y^2}$形式的问题

题目中有出现 x^2+y^2 或$\sqrt{x^2+y^2}$或 $ax+by$ 形式的代数式时可通过构造向量，利用向量模的性质或向量数量积的性质来帮助解题.

例 34 设 $P(x,y)$是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的任意一点，则 $2x+3y$ 的最大值和最小值分别为________和________.

解 设 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{x}{5},\frac{y}{4}\right)$，$\boldsymbol{b}=(10,12)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2x+3y$$
$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=1\times 2\sqrt{61}=2\sqrt{61}$$

因为

$$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

所以

$$-2\sqrt{61}\leqslant 2x+3y\leqslant 2\sqrt{61}$$

即 $2x+3y$ 的最大值和最小值分别为 $2\sqrt{61}$和 $-2\sqrt{61}$.

二、走进考场 14

1.[2007·天津文、理三(22)]设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$,$F_2$,$A$是椭圆上的一点,$AF_2\perp F_1F_2$,原点$O$到直线$AF_1$的距离为$\frac{1}{3}|OF_1|$.

(1)证明:$a=\sqrt{2}b$;

[理科](2)设Q_1,Q_2为椭圆上的两个动点,$OQ_1\perp OQ_2$,过原点O作直线Q_1Q_2的垂线OD,垂足为点D,求点D的轨迹方程.

[文科]*(2)求$t\in(0,b)$,使得下述命题成立:设圆$x^2+y^2=t^2$上任意点$M(x_0,y_0)$处的切线交椭圆于Q_1,Q_2两点,则$OQ_1\perp OQ_2$.

2.[2006·浙江理三(19)]如图7.73,椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$与过点$A(2,0)$,$B(0,1)$的直线有且只有一个公共点T,且椭圆的离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

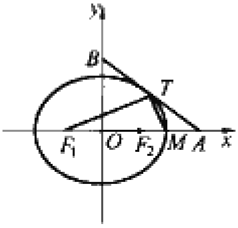


图7.73

(1)求椭圆方程;

(2)设F_1,F_2分别为椭圆的左、右焦点,M为线段AF_2的中点,求证:$\angle ATM=\angle AF_1T$.

3.[2006·江西文理三(21)]如图7.74,椭圆Q:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(c,0)$过点$F$的一动直线$m$绕点$F$转动,并且交椭圆于$A$,$B$两点,$P$为线段$AB$的中点.求点$P$的轨迹$H$的方程.

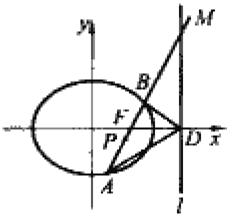


图7.74

4.[2005·北京春理一(6)]已知双曲线的两个焦点为$F_1(-\sqrt{5},0)$,$F_2(\sqrt{5},0)$,P为此双曲线上的一点,且$PF_1\perp PF_2$,$|PF_1||PF_2|=2$,则该双曲线的方程是 ( )

A.$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ B.$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ C.$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ D.$x^2-\frac{y^2}{4}=1$

5.[2005·山东文理二(14)]设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$,右准线$l$与两条渐近线交于$P$,$Q$两点,如果$\triangle PQF$是直角三角形,则双曲线的离心率$e=$________.

6. [2005·浙江文理二(13)]过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线相交于 M,N 两点，以 MN 为直径的圆恰好过双曲线的右顶点，则双曲线的离心率等于________.

7. [2005·北京春理三(18)]如图 7.75，O 为坐标原点，直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b，且交抛物线 $y^2=2px(p>0)$于 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$两点.

(1)写出直线 l 的截距式方程；

(2)证明$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{b}$；

(3)当 $a=2p$ 时，求$\angle MON$ 的大小.

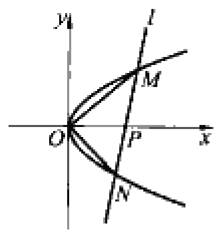


图 7.75

8. [2005·北京春文三(18)]如图 7.75 所示，O 为坐标原点，过点 $P(3,0)$ 且斜率为 k 的直线 l 交抛物线$y^2=2x$ 于 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$两点.

(1)写出直线 l 的方程；

(2)求 x_1x_2 与 y_1y_2 的值；

(3)求证：$OM\perp ON$.

9. [2005·广东文理三(17)]如图 7.76，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2$ 上异于坐标原点 O 的两不同动点 A,B 满足 $AO\perp BO$.

(1)求$\triangle AOB$ 的重心 G(即三角形三条中线的交点)的轨迹方程；

(2)$\triangle AOB$ 的面积是否存在最小值？若存在，请求出最小值；若不存在，请说明理由.

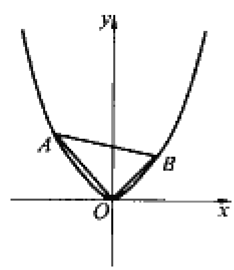


图 7.76

10. [2005·上海理三(19)]如图 7.77，点 A,B 分别是椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 长轴的左、右端点，点 F 是椭圆的右焦点，点 P 在椭圆上且位于 x 轴上方，$PA\perp PF$.

(1)求点 P 的坐标；

(2)设 M 是椭圆长轴 AB 上的点，点 M 到直线 AP 的距离等于$|MB|$，求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.

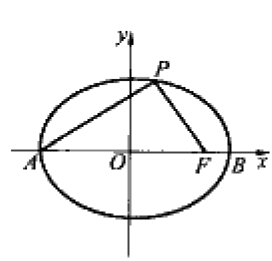


图 7.77

11. [2005·天津理三(21)、文三(22)]抛物线 C 的方程为 $y=ax^2(a<0)$，过抛物线 C 上一点 $P(x_0,y_0)(x_0\neq0)$作斜率为 k_1,k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$两点(P,A,B 三点互不相同)，且满足 $k_2+\lambda k_1=0$ ($\lambda\neq0$,且 $\lambda\neq1$).

(1)求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程；

(2)设直线 AB 上一点 M，满足 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$，证明线段 PM 的中点在 y 轴上；

(3)当 $\lambda=1$ 时，若点 P 的坐标为 $(1,-1)$，求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

12.[2004·重庆理三(21)]如图 7.78，设 $p>0$ 是一常数，过点 $Q(2p,0)$ 的直线与抛的线 $y^2=2px$ 交于相异两点 A,B，以线段 AB 为直径作圆 H(H 为圆心)，试证：抛物线顶点在圆 H 的圆周上，并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程.

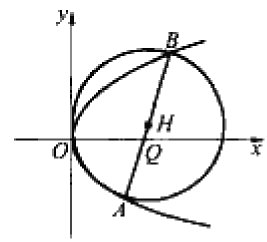


图 7.78

13.[2004·重庆文三(21)]设直线 $ay=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于相异两点 A,B，以线段 AB 为直线作圆 H(H 为圆心)，试证：抛物线顶点在圆 H 的圆周上，并求 a 的值，使圆 H 的面积最小.

14.[2004·全国卷Ⅲ理三(21)]设椭圆 $\dfrac{x^2}{m+1}+y^2=1$ 的两个焦点是 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)(c>0)$，且椭圆上存在点 P，使得直线 PF_1 与直线 PF_2 垂直.

(1)求实数 m 的取值范围；

(2)设直线 l 是相应于焦点 F_2 的准线，直线 PF_2 与 l 相交于点 Q，若 $\dfrac{|QF_2|}{|PF_2|}=2-\sqrt{3}$，求直线 PF_2 的方程.

15.[2004·湖北文、理三(20)]直线 $l:y=kx+1$ 与双曲线 $C:2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A,B.

(1)求实数 k 的取值范围；

(2)是否存在实数 k，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由.

16.[2004·北京春理三(18)]已知 $A(2,8)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$ 在抛物线 $y^2=2px$，$\triangle ABC$ 的重心与此抛物线的焦点 F 重合.

(1)写出该抛物线的方程和焦点 F 的坐标；

(2)求线段 BC 中点 M 的坐标；

(3)求 BC 所在直线的方程.

17.[2004·湖北文一(2)]已知点 $M_1(6,2)$ 和 $M_2(1,7)$，直线 $y=mx-7$ 与线段 M_1M_2 的交点 M 分有向线段 M_1M_2 的比为 3:2，则 m 的值为 ( )

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 4

18. [2003·北京春理三(22)]已知动圆过定点 $P(1,0)$，且与定直线 $l: x=-1$ 相切，点 C 在直线 l 上.

(1)求动圆圆心的轨迹 M 的方程；

(2)设过点 P 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与曲线 M 相交于 A,B 两点.

①问：$\triangle ABC$ 能否为正三角形？若能，求点 C 的坐标；若不能，说明理由.

②当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，求这种点 C 的纵坐标的取值范围.

19. [2002·广东文理三(20)]设 A,B 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 上两点，点 $N(1,2)$ 是线段 AB 的中点.

(1)求直线 AB 的方程；

(2)如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C,D 两点，那么 A,B,C,D 四点是否共圆？为什么？

20. [2001·全国理三(19)、文三(20)]设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，经过 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，点 C 在抛物线的准线上，且 $BC/\!/x$ 轴，证明直线 AC 经过原点 O.

21. [2001·全国、广东文理二(14)]双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，若 $PF_1\perp PF_2$，则点 P 到 x 轴的距离为________.

22. [2000·全国、天津、广东文二(14)]椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1,F_2，点 P 为其上的动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 的横坐标的取值范围是________.

*23. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内一点 $M(P,0)(0<P<a)$，椭圆上的动点 Q，向量 $\overrightarrow{MQ}$ 按顺时针方向绕点 M 旋转 $90°$ 到达 $\overrightarrow{MP}$，试求点 P 的轨迹，探索所得的轨迹与已知椭圆的内在联系，提出你的发现，并证明你的判断.

24. 如图 7.79，B 为半圆 $x^2+y^2=1(-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1)$ 上的一动点，点 A 坐标为$(2,0)$，且 $\triangle ABC$ 是 BC 为斜边的等腰直角三角形，问：在何处时，O,C 两点的距离最远？最远距离是多少？

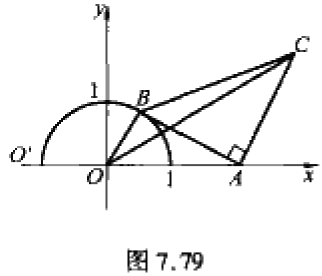


图 7.79

三、答案与提示

1.［理科］(2) $x^2+y^2=\frac{2}{3}b^2$ ［文科］$t=\frac{\sqrt{6}}{3}b$ 提示［理科］(2)设 $D(x_0, y_0)$，当 $y_0\neq 0$ 时，由 $OD\perp Q_1Q_2$ 得 $K_{Q_1Q_2}=-\frac{x_0}{y_0}$，所以 $Q_1Q_2: y=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，设 $K=-\frac{x_0}{y_0}$，$m=y_0+\frac{x_0^2}{y_0}$，得 $Q_1Q_2: y=kx+m$，由 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+2y^2=2b^2\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2b^2=0$，设 $Q_1(x_1, y_1)$，$Q_2(x_2, y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2b^2}{1+2k^2}$，从而 $y_1y_2=\frac{m^2-2b^2k^2}{1+2k^2}$，由 $OQ_1\perp OQ_2$ 得 $\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OQ_2}=0$，即 $3m^2=2b^2(1+k^2)$．将 k，m 值代入得 $x_0^2+y_0^2=\frac{2}{3}b^2$，当 $y_0=0$ 时，$Q_1Q_2: x=x_0$，由 $\begin{cases}x=x_0\\x^2+2y^2=2b^2\end{cases}$，得 $x_1=x_2=x_0$，$y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2b^2-x_0^2}{2}}$．由 $\overrightarrow{OQ_1}\perp\overrightarrow{OQ_2}$ 得 $x_0^2-\frac{2b^2-x_0^2}{2}=0$，所以 $x_0^2=\frac{2}{3}b^2$，点 D 坐标仍满足 $x_0^2+y_0^2=\frac{2}{3}b^2$

［文科］(2)圆 $x^2+y^2=t^2$ 上任意点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $x_0x+y_0y=t^2$，当 $t\in(0, b)$ 时，圆在椭圆内，切线与椭圆必有两交点，设为 $Q_1(x_1, y_1)$，$Q_2(x_2, y_2)$，当 $y_0\neq 0$ 时，由 $\begin{cases}x_0x+y_0y=t^2\\x^2+2y^2=2b^2\end{cases}$，得 $(2x_0^2+y_0^2)x^2-4t^2x_0x+2t^4-2b^2y_0^2=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{4t^2x_0}{2x_0^2+y_0^2}$，$x_1x_2=\frac{2t^4-2b^2y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$，$y_1y_2=\frac{t^4-2b^2x_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$．若 $OQ_1\perp OQ_2$，则 $\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OQ_2}=0$，即 $3t^4-2b^2(x_0^2+y_0^2)=0$，亦即 $3t^4-2b^2t^2=0$，解得 $t=\frac{\sqrt{6}}{3}b$，当 $y_0=0$ 时同理可得 $t=\frac{\sqrt{6}}{3}b$，反之，当 $t=\frac{\sqrt{6}}{3}b$ 时，可得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，所以 $OQ_1\perp OQ_2$

2. (1) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$ 提示：(2) $F_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$，$M\left(1+\frac{\sqrt{6}}{4},0\right)$，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+2y^2=1\\y=-\frac{1}{2}+1\end{cases}$ 得，$T\left(1, \frac{1}{2}\right)$．证 $\cos\angle ATM=\cos\angle AF_1T$（或证 $\tan\angle ATM=\tan\angle AF_1T$）

3. (1) $b^2x^2+a^2y^2-b^2cx=0$ 提示：要分 AB 是否与 x 轴垂直讨论

4. C　提示：设 $P(x_0,y_0)$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$

5. $\sqrt{2}$　提示：$P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，$Q\left(\frac{a^2}{c},-\frac{ab}{c}\right)$，$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{QF}=0$

6. 2　提示：$M\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$，$N\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$，右顶点 $B(a,0)$，$\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{NB}$

7. (1)$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$　(3)90°　提示：(3)$\overrightarrow{OM}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{ON}=(x_2,y_2)$，此时 $y_1y_2=-4p^2$，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\frac{y_2^2}{2p}=4p^2$. $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$

8. (1)$y=k(x-2)(k\neq0)$　(2)$x_1x_2=4$，$y_1y_2=-4$　提示：(3)证$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$

9. (1)$y=3x^2+\frac{2}{3}$　(2)1　提示：(1)设 $G(x,y)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x=\frac{x_1+x_2}{3}$，$y=\frac{y_1+y_2}{3}$，由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$得 $x_1x_2=-1$，所以 $y=\frac{1}{3}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]=\frac{1}{3}(3x)^2+\frac{2}{3}$

10. (1)$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$　(2)$\sqrt{15}$　提示：(1)设 $P(x_1,y_1)$，由题设$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，与椭圆方程联立

11. (1)$\left(0,\frac{1}{4a}\right)$，$y=-\frac{1}{4a}$　(2)$(-\infty,-1)\cup(-1,-\frac{1}{4})$　提示：(1)PA：$y-y_0=k_1(x-x_0)$，PB：$y-y_0=k_2(x-x_0)$，点 $p(x_0,y_0)$和 $A(x_1,y_1)$满足 $\begin{cases}y-y_0=k_1(x-x_0)\\ y=ax^2\end{cases}\Rightarrow x_1+x_0=\frac{k_1}{a}$，即 $x_1=\frac{k_1}{a}-x_0$①. 同理 $x_2=\frac{k_2}{a}-x_0$，由已知 $k_2=-\lambda k_1$，所以 $x_2=-\frac{\lambda}{a}k_1-x_0$②. 设 $M(x_M,y_M)$，由$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$得 $x_M=\frac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$，将式①，式②代入得 $x_M=-x_0$，即 $x_M+x_0=0$　(3)抛物线方程为$y=-x^2$，由式①得 $x_1=-k_1-1$，代入 $y=-x^2$ 得 $y_1=-(k_1+1)^2$，将 $\lambda=1$ 代入式②得 $x_2=k_1-1$，代入 $y=-x^2$ 得 $y_2=-(k_1-1)^2$. 则 $A(-k_1-1,-k_1^2-2k-1)$，$B(k_1-1,-k_1^2+2k-1)$，于是$\overrightarrow{AP}=(k_1+2,k_1^2+2k_1)$，$\overrightarrow{AB}=(2k_1,4k_1)$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2k_1(k_1+2)(2k_1+1)<0$，解得 $k_1<-2$ 或$-\frac{1}{2}<k<0$，又$y_1=-(k_1+1)^2$

12. $x=2p$　提示：$AB\perp x$ 轴时，Q 为圆心，半径为 $y_B=2p=|OQ|$，当 AB 不垂直 x 轴时，设 AB：$y=k(x-2p)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，可求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

13. $a=0$

14.(1)$m\geqslant 1$　(2)$y=\pm(\sqrt{3}-2)(x-\sqrt{2})$　提示:(1)$m+1>1,m>0,c=\sqrt{m}$,设 $P(x_0,y_0)$,由$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$得 $x_0^2+y_0^2=m$①,将式①与$\frac{x_0^2}{m+1}+y_0^2=1$联立,消去 y_0,得 $x_0^2=\frac{m^2-1}{m}$　(2)$x_p=\pm\sqrt{\frac{m^2-1}{m}}$,$x_Q=\frac{m+1}{\sqrt{m}}$,$\frac{|QF_2|}{|F_2P|}=\lambda=2-\sqrt{3}$,当 $x_p=\sqrt{\frac{m^2-1}{m}}$ 时,由定比分点坐标公式得 $x_F=\frac{\frac{m+1}{\sqrt{m}}+(2-\sqrt{3})\sqrt{\frac{m^2-1}{m}}}{3-\sqrt{3}}=c=\sqrt{m}$,$m+1+(2-\sqrt{3})\sqrt{m^2-1}=(3-\sqrt{3})m$,$(2-\sqrt{3})\sqrt{m^2-1}=(2-\sqrt{3})m-1$,$\sqrt{m^2-1}=m-(2+\sqrt{3})$,解得 $m=2$(不合题意,方程右边小于 0).当 $x_p=-\sqrt{\frac{m^2-1}{m}}$ 时,同上得 $m=2$,从而 $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

15.(1)$-2<k<-\sqrt{2}$　(2)$k=-\frac{6+\sqrt{6}}{5}$　提示:(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,假设存在,得 $FA\perp FB$,即$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$,代入化简得 $5k^2+2\sqrt{6}k-6=0$,$k=\frac{6-\sqrt{6}}{5}\notin(-2,-\sqrt{2})$

16.(1)$y^2=32x$,$F(8,0)$　(2)$(11,-4)$　(3)$4x+y-40=0$　提示:(2)由 F 是$\triangle ABC$ 的重心,点 M 是 BC 中点,得$\frac{|AF|}{|FM|}=2$,逆用定比分点坐标公式求出点 M 坐标

17.D　提示:由截比定理得 $\lambda=-\frac{6m-9}{m-14}=\frac{3}{2}$

18.(1)$y^2=4x$　(2)①不能　②$y<-\frac{10\sqrt{3}}{3}$或 $y>\frac{2\sqrt{3}}{9}$($y\neq 2\sqrt{3}$)　提示:(2)②设 $c(-1,y)$,由$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$得$\angle ACB$ 为锐角;由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{8\sqrt{3}}{3}y+\frac{16}{9}<0$得 $y>\frac{2\sqrt{3}}{9}$;由$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{8\sqrt{3}}{3}y+\frac{32}{3}+16<0$,得 $y<-\frac{10\sqrt{3}}{3}$

19.(1)$x-y+1=0$　(2)共圆　提示:(2)由$\begin{cases}x-y+1=0\\x^2-\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$,得 $A(3,4)$,$B(-1,0)$,CD:$y=-x+3$,同理得 $C(-3+2\sqrt{5},6-2\sqrt{5})$,$D(-3-2\sqrt{5},6+$

$2\sqrt{5}$)，则$\overrightarrow{CA}=(6-2\sqrt{5},-2+2\sqrt{5})$，$\overrightarrow{DA}=(6+2\sqrt{5},-2-2\sqrt{5})$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DA}=0$. 又$\overrightarrow{CB}=(2-2\sqrt{5},-6+2\sqrt{5})$，$\overrightarrow{DB}=(2+2\sqrt{5},-6-2\sqrt{5})$，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DB}=0$

20. 提示：设 $A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)(y_1\neq y_2)$，因为 $BC\,//\,x$ 轴，所以 $C\left(-\frac{p}{2},y_2\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p},-y_1\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(\frac{y_2^2}{2p}-\frac{p}{2},y_2\right)$，因为 A,F,B 三点共线，所以$\left(\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p}\right)y_2+y_1\left(\frac{y_2^2}{2p}-\frac{p}{2}\right)=0$，$y_1y_2=-p^2$，又$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{p}{2},y_2\right)$，因为$\frac{y_1^2}{2p}y_2+y_1\frac{p}{2}=0$，所以$\overrightarrow{OA}\,//\,\overrightarrow{OC}$

21. $\frac{16}{5}$　提示：设 $P(x_0,y_0)$，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$

22. $\left(-\frac{3}{5}\sqrt{5},\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)$　提示：设 $P(x_0,y_0)$，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}<0$

23. $\frac{(x-p)^2}{b^2}+\frac{(y-p)^2}{a^2}=1$，轨迹仍为椭圆，大小未变，而位置改变了，其长轴、短轴分别和原来椭圆的长、短轴互相垂直　提示：设 $Q(a\cos\theta,b\sin\theta)$，则$\overrightarrow{MQ}=(a\cos\theta-p,b\sin\theta)$，$\overrightarrow{MP}=(b\sin\theta,-a\cos\theta+p)$，所以 $p(b\sin\theta,-a\cos\theta+p)$，设 $p(x,y)$，则$\begin{cases}x=b\sin\theta+p\\y=-a\cos\theta+p\end{cases}$，$\begin{cases}\sin\theta=\frac{x-p}{b}\\-\cos\theta=\frac{y-p}{a}\end{cases}$平方相加

24. $\angle AOB=\frac{3\pi}{4}$，$|OC|=1+2\sqrt{2}$　提示：设$\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则点 B 坐标为$(\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{AB}=(\cos\theta-2,\sin\theta)$，所以$\overrightarrow{AC}=(\sin\theta,2-\cos\theta)$，则 $C(2+\sin\theta,2-\cos\theta)$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{9+4\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}$. 当 $\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=1$，即$\theta=\frac{3\pi}{4}$时，$|\overrightarrow{OC}|$最大

第五节　向量法解物理问题

向量有着丰富的物理背景，如物理学中的力、速度、加速度、位移等都是向量的具体表现形式，力所做的功是向量数量积的物理背景，因此向量在运动学、力学、航天、航海中有着广泛的应用，与这些内容有关的问题均可考虑通过建立数这模型，利用向量知识求解.

用向量方法解物理问题的步骤如下：

(1)把物理问题转化为数学问题.

(2)建立以向量为主体的数学模型.

(3)求出数学模型的相关解.

(4)用已经获得的答案去解析相关的物理现象.

在解题时要先画出示意图来分析.

一、解法指导

(一)运动学中的速度、位移、加速度等问题

运动学中的速度、位移、加速度等问题都可以用向量来表示,它们的合成与分解都遵循向量的平行四边形法则或三角形法则,即可以通过向量的加法和减法来解,解题时先作出速度合在的平行四边形,然后求解以向量的模为边,以向量的夹角为内角(或内角的补角)的平行四边形或三角形(一般要用到解斜三角形的知识).而动量 mv 是数乘向量.

例1　一小船位于 $d=60$ m 宽的河边 P 处,在此处下游 $l=80$ m 处河流变成"飞流直下三千尺"的瀑布,若河水流速方向由上游指向下游(与河岸平行),水速大小为 5 m/s(图 7.80).为了使小船能安全渡河,船的划速不能小于多少?当划速最小时,划速方向如何?

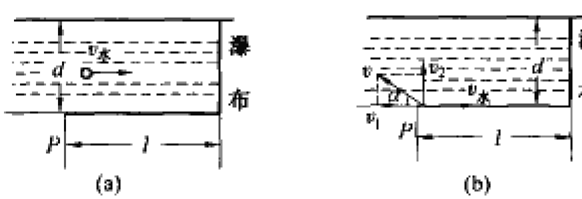


图 7.80

解　设船速为 v_0,方向与上游河岸夹角为 α,将 v_0 正交分解为 v_1, v_2,则 $v_1=v_0\cos\alpha$, $v_2=v_0\sin\alpha$.

船同时参与两个分运动:一个是沿 v_2 方向的匀速直线运动,另一个是沿 $v_水$ 方向的匀速直线运动(其速度为 $v_水-v_1$),这两个运动的时间 t_1, t_2 相等.

设船到对岸时恰好到河与瀑布的交界处.由 $t_1=\dfrac{d}{v_2}$, $t_2=\dfrac{l}{v_水-v_1}$ 可得

$$\frac{d}{v_2}=\frac{l}{v_水-v_1}$$

即

$$\frac{d}{v_0\sin\alpha}=\frac{l}{v_水-v_0\cos\alpha}$$

因为 $d=60$ m, $l=80$ m, $v_{水}=5$ m/s,所以

$$\frac{60}{v_0\sin\alpha}=\frac{80}{5-v_0\cos\alpha}$$

则

$$v_0=\frac{15}{4\sin\alpha+3\cos\alpha}$$

设 $y=4\sin\alpha+3\cos\alpha=5\sin(\alpha+\varphi)$,其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$, $\varphi\approx37°$,所以当 $\sin(\alpha+\varphi)=1$ 时, $y_{\max}=5$, v_0 有最小值 $\frac{15}{5}=3$ m/s. 此时 $\alpha\approx90°-37°=53°$.

因此,为使小船能安全渡河,船的划速不能小于 3 m/s. 当划速最小时,划速方向与上游河岸夹角约为 53°.

例 2 一条河的两岸互相平行,河宽为 d km,一艘船从 A 处出发航行到对岸,已知船航行的速度为 $|\boldsymbol{v}_1|$ km/h,水流速度为 $|\boldsymbol{v}_2|$ km/h,试解答下列问题:

(1)当 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角 θ 为多大时,可使船抵达 A 的正对岸 B 处?

(2)若 $d=2$ km, $|\boldsymbol{v}_1|=10$ km/h, $|\boldsymbol{v}_2|=4$ km/h,则要使船抵达 B 的上游 C 处,且 $BC=d=2$ km,此时用时多少?

解 (1)如图 7.81,作出速度合成的平行四边形, $\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{v}_2$, $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{v}_1$, $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 为合速度,由题意知 $DF\perp DE$,设 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 θ,显然 θ 为钝角. 因为 $\angle FED=\pi-\theta$,且 $\cos\angle FED=\frac{|\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1|}$, $\pi-\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以 $\pi-\theta=\arccos\frac{|\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1|}$,则 $\theta=\pi-\arccos\frac{|\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1|}$.

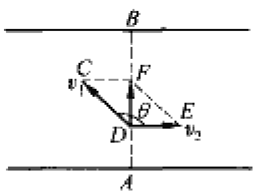


图 7.81

(2)如图 7.82,作出速度合成的平行四边形, $\overrightarrow{MQ}=\boldsymbol{v}_1$, $\overrightarrow{MN}=\boldsymbol{v}_2$,合速度 $\overrightarrow{MP}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$. 依题意知 $\angle ACB=45°$,因为 $MN/\!/BC$,所以在 $\triangle MNP$ 中,由正弦定理得

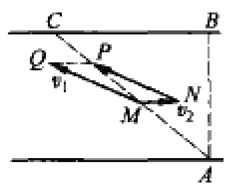


图 7.82

$$\frac{MN}{\sin\alpha}=\frac{PN}{\sin\angle PMN}$$

即

$$\frac{|\boldsymbol{v}_1|}{\sin\alpha}=\frac{|\boldsymbol{v}_1|}{\sin 135°}$$

所以

$$\sin\alpha=\frac{|\boldsymbol{v}_2|\sin 135°}{|\boldsymbol{v}_1|}=\frac{4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

显然 α 为锐角，所以

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{23}}{5}$$

所以

$$\cos\angle PNM=\cos(180^\circ-\angle PMN-\alpha)=-\cos(135^\circ+\alpha)=$$
$$-\cos 135^\circ\cos\alpha+\sin 135^\circ\sin\alpha=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{23}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{46}}{10}+\frac{1}{5}$$

于是船在水平方向上的分速度为

$$|\boldsymbol{v}_1|\cos\angle PNM-|\boldsymbol{v}_2|=10\left(\frac{\sqrt{46}}{10}+\frac{1}{5}\right)-4=\sqrt{46}-2$$

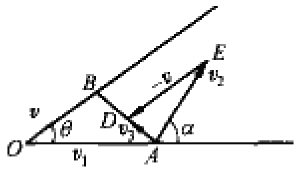
设船从 A 抵达 C 所需的时间为 t，因为船在水平方向上的位移为 $\overrightarrow{BC}$，所以 $(\sqrt{46}-2)t=d=2$，解得 $t=\frac{2+\sqrt{46}}{21}\approx 0.418$ h.

所用时约 0.418 h.

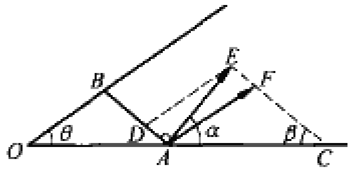
例 3　在一个很大的湖岸边(可视湖岸为直线)停放着一只小船，由于缆绳突然断开，小船被风刮跑，其方向与对岸成 15°，速度为 $v=2.5$ km/h. 同时岸上有一个，从同一地点开始追赶小船，已知他在岸上跑的速度为 $v_1=4$ km/h，在水中游的速度为 $v_2=2$ km/h，问此人能否追上小船，小船能被人追上的最大速度是多少?

解　设人在岸上跑 t h 到达点 A，然后人在水中沿 AE 方向游泳追船，如图 7.83(a)，以船在点 B 时为参照物，则人在水中对船的速度 $\boldsymbol{v}_3$ 应为 $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}$，要追上船，不管 $\boldsymbol{v}_2$ 方向如何，相对速度 $\boldsymbol{v}_3$ 方向不变，只要 $\alpha>\theta$，人就能追上船，由于 $\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}_3$ 组成的向量三角形，其中 $\boldsymbol{v}_3$，$\boldsymbol{v}$ 的方向不变(即 $\angle ADE$ 恒定)，而 $\boldsymbol{v}_2$ 大小是恒定的，由平面几何知识可知，在 $\triangle ADE$ 中，要 DE 边最长(即 v 的大小最大)，AE 必与 AD 互相垂直(如图 7.83(b))，$AF /\!/ DE /\!/ OB$，$CE /\!/ AB$. 因为 $\triangle AFC\backsim\triangle OAB$，所以 $\frac{AF}{AC}=\frac{OB}{OA}=\frac{v}{v_1}$，又因为 $AF=v$，所以 $AC=v_1$.

在 Rt$\triangle AEC$ 中，有 $\sin\angle ACE=\sin\beta=\frac{v_2}{v_1}=\frac{1}{2}$，所以 $\beta=30^\circ$，$\angle EAC=\alpha=60^\circ$，$\angle AED=\angle EAF=60^\circ-15^\circ=45^\circ$，即 $\triangle AED$ 为等腰直角三角形，因此有 $v_{max}=\sqrt{2}v_2=2\sqrt{2}$ km/h，由此可见，当船速为 2.5 km/h 时，人可追上小船，小船能被人追上的最大速度是 $2\sqrt{2}$ km/h.



(a)



(b)

图 7.83

(二)物理学中有关力学问题

物理力学中的力可以表示为向量,力的大小是向量的模,力的分解与合成其实就是向量的平行四边形法则,合力与分力的夹角就是向量的夹角,物体重力与拉力和为0就是相反向量的和为0,力矩就是数乘向量.

涉及物体处于平衡状态,一般从物体受的重力与拉力的合力分析,这时所受各力的合力为0,关于某点的力矩之和为0.

涉及力的问题先要对物体作受力分析.

例 4 如图 7.84,平面内三个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 作用于同一点且处于平衡状态. 已知 $|\boldsymbol{F}_1|=1$ N, $|\boldsymbol{F}_2|=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ N, $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 的夹角是 $45°$,求 $\boldsymbol{F}_3$ 的大小及 $\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角.



图 7.84

解 设 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力为 $\boldsymbol{F}$,则 $|\boldsymbol{F}|=|\boldsymbol{F}_3|$, $\angle FF_1O=180°-45°=135$. 在 $\triangle OF_1F$ 中,由余弦定理得

$$|\overrightarrow{OF}|^2=1^2+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\cos135°=4+2\sqrt{3}$$

则

$$|\overrightarrow{OF}|=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$$

所以 $|\boldsymbol{F}_3|=1+\sqrt{3}$. 又由正弦定理得

$$\frac{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{\sin\angle F_1OF}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sin135°}$$

所以 $\sin\angle F_1OF=\dfrac{1}{2}$,则 $\angle F_1OF=30°$. 所以 $\angle F_3OF_1=150°$. 因此,力 $\boldsymbol{F}_3$ 的大小为 $(1+\sqrt{3})$ N, F_3 与 F_1 的夹角为 $150°$.

例 5 如图 7.85,一条轻绳(绳的质量忽略不计)跨过同一高度的两个空滑轮,两端分别拴牢质量为 6 kg 和 3 kg 的物体,在滑轮间的一段绳上悬挂第三个物体,为使这个系统保持平衡,试求第三个物体的质量 m kg 的取值范围.

解　取第三个物体为原点建立如图 7.86 所示的平面直角坐标系，第三个物体的受力情况依次用向量 $\overrightarrow{PM_1}, \overrightarrow{PM_2}, \overrightarrow{PM}$ 表示，设 $\overrightarrow{PM_1}, \overrightarrow{PM_2}$ 分别与 y 轴正方向的夹角为 θ_1, θ_2，则

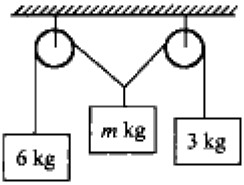


图 7.85

$$\overrightarrow{PM} = (0, -m), \quad \overrightarrow{PM_1} = (-6\sin\theta_1, 6\cos\theta_1)$$

$$\overrightarrow{PM_2} = (3\sin\theta_2, 3\cos\theta_2)$$

依题意得

$$\overrightarrow{PM_1} + \overrightarrow{PM_2} + \overrightarrow{PM} = \mathbf{0}$$

即

$$\begin{cases} -6\sin\theta_1 + 3\sin\theta_2 = 0 & ① \\ 6\cos\theta_1 + 3\cos\theta_2 = m & ② \end{cases}$$

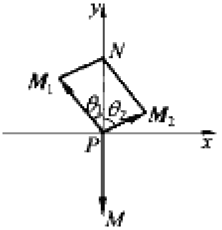


图 7.86

由式①得

$$6\sin\theta_1 = 3\sin\theta_2$$

由式②得

$$6\cos\theta_1 = m - 3\cos\theta_2$$

平方相加得

$$36 = 9 + m^2 - 6m\cos\theta_2$$

所以

$$\cos\theta_2 = \frac{m^2 - 27}{6m}$$

同法消去 $\sin\theta_2$ 和 $\cos\theta_2$ 可得

$$\cos\theta_1 = \frac{m^2 + 27}{12m}$$

在▱PM_1NM_2 中，由分析可知

$$0^\circ < \theta_1 < \theta_2 < 90^\circ$$

即

$$1 > \frac{m^2 + 27}{12m} > \frac{m^2 - 27}{6m} > 0$$

所以

$$0 < 2m^2 - 54 < m^2 + 27 < 12m \quad (m > 0)$$

则 $m \in (3\sqrt{3}, 9)$.

例 6　如图 7.87(a)，重力为 G 的均匀小球放在倾角为 α 的斜面上，球被与斜面夹角为 θ 的木板挡住，则木板与斜面间的夹角 θ 应为多大？

解　作出物体的受力分析图如图 7.87(b)，重力为 $\boldsymbol{G}$，斜面弹力为 $\boldsymbol{N}_2$(垂

直于斜面),木板弹力为 N_1(垂直于木板),其中 N_1 与 N_2 合力大小恒为 G,方向向上,N_2 方向始终不变,随着木板的转动,N_1 的大小在不断地变化,在 $\triangle ON_1N$ 中,$NN_1 /\!/ ON_2$,所以 $NN_1 \perp$ 斜面,则 $\angle ONN_1=\alpha$. 同理 $\angle ON_1N=Q$,由正弦定理得 $\frac{|N_1|}{\sin\alpha}=\frac{|G|}{\sin\theta}$,则 $|N_1|=\frac{|G|\sin\alpha}{\sin\theta}$,当 $\sin\theta$ 取最大值 1 时,$|N_1|_{\min}=|G|\sin\alpha$,此时 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

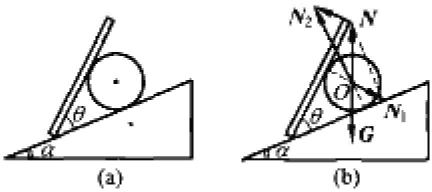


图 7.87

*例 7 某工程欲修建一座小型吊桥,如图 7.88,吊桥长 $AB=2l$,在点 A 处装铰链,在点 C 处装吊索,吊索一端跨过滑轮 D,以便拉动吊索开启吊桥,开启角 $\angle BAE=\theta$,$AC=d$,桥重为 W,滑轮 D 离桥面的铅直距离为 h,试求吊索中的张力 T 与开启角 θ 之间的函数关系,并求 T 的最大值.

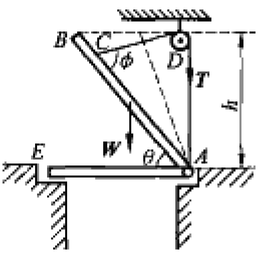


图 7.88

解 吊桥受到的力有:吊索中的张力 T(沿吊索方向),重力 $\vec{W}$(作用在桥的中点,方向铅直向下),在铰链点 A 对桥的作用力 R(沿水平、铅直方向的分向量分别为 R_x, R_y). 当开启角 $\angle BAE=\theta$ 时,桥处于平衡,所受各力关于点 A 的力矩之和为

$$Wl\cos\theta-Td\sin\varphi=0$$

在 $\triangle ACD$ 中,$AD=h$, $AC=d$, $\angle CAD=90°-\theta$, $\angle ACD=\varphi$,所以

$$CD^2=d^2+h^2-2dh\cos(90°-\theta)$$

$$CD=\sqrt{d^2+h^2-2dh\sin\theta}$$

因为

$$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2},\quad CD\cdot d\sin\varphi=\frac{1}{2}dh\sin(90°-\theta)$$

所以

$$d\sin\varphi=\frac{dh\cos\theta}{\sqrt{d^2+h^2-2dh\sin\theta}}$$

所以

$$T=\frac{\overline{W}l\cos\theta}{d\sin\varphi}=\frac{\overline{W}l\cos\theta\sqrt{d^2+h^2-2dh\sin\theta}}{dh\cos\theta}=\frac{\overline{W}l}{dh}\sqrt{d^2+h^2-2dh\sin\theta}\quad(\theta\in[0,\frac{\pi}{2}))$$

当且仅当 $\theta=0$ 时

$$T_{max}=\frac{\overline{W}l}{dh}\sqrt{d^2+h^2}$$

这说明开启角 θ 越小，吊索中张力越大，当开始起吊时，T 最大，为了提高安全度，吊索的拉断张力应该取 T_{max} 的若干倍，以保证运动中的安全.

（三）力在位移上所做的功

力在位移上所做的功就是作用力 $\boldsymbol{F}$ 与物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下所产生的位移 $\boldsymbol{S}$ 所对应的两个向量的数量积. 在解此类问题时可画出平面图形，把已知、所求各量用向量表示，然后结合向量的加减法及平几知识求得向量的模和夹角，再利用数量积运算公式求得物体所做的功.

例 8　质量为 $m=2.0$ kg 的物体，在平行于斜面向上的 10 N 的拉力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿倾斜角 $\theta=30°$ 的光滑斜面向上滑行 $|\boldsymbol{S}|=2.0$ m 的距离. ($g=9.8$ m/s^2)

(1)分别求物体所受各力在这一过程中对物体所做的功；

(2)在这一过程中，物体所受各力对物体做功的代数和是多少？

(3)求物体所受合外力对物体所做的功，并指明它与物体所受各力对物体做功的代数和之间有何关系.

解　(1)木块受三个力的作用：重力 $\boldsymbol{G}$，拉力 $\boldsymbol{F}$ 和支持力 $\boldsymbol{F}_N$，如图 7.89 所示，拉力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{S}$ 方向相同，所以拉力对木块所做的功为

$$\overline{W}_F=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos 0°=20\ (\mathrm{J})$$

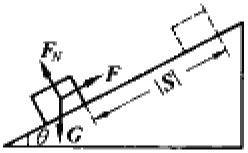


图 7.89

支持力 $\boldsymbol{F}_N$ 与位移方向垂直，不做功，所以 $\overline{W}_N=\boldsymbol{F}_N\cdot\boldsymbol{S}=0$. 重力 G 对物体所做的功为

$$\overline{W}_G=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{G}||\boldsymbol{S}|\cos(90°+\theta)=-19.6\ (\mathrm{J})$$

(2)物体所受各力对物体做功的代数和为

$$\overline{W}=\overline{W}_F+\overline{W}_N+\overline{W}_G=0.4\ (\mathrm{J})$$

(3)物体所受合外力的大小为

$$|\boldsymbol{F}_{合}|=|\boldsymbol{F}|-|\boldsymbol{G}|\sin 30°=0.2\ (\mathrm{N})$$

所以合外力对物体所做的功为：

$$\overline{W}=\boldsymbol{F}_{合}\cdot\boldsymbol{S}=0.4\ (\mathrm{J})$$

所以物体所受合外力对物体所做的功，与物体所受各力对物体做功的代数和相等.

(四)利用向量的共线知识解决物理问题

如求几个质点的质量中心问题：设质量为 m_1 和 m_2 的两质点分别在 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$处，其合力作用点 $P(x,y)$在联结 p_1 与 p_2 的线段上，根据力矩相等的原理有：$m_1\overrightarrow{P_1P}=m_2\overrightarrow{PP_2}$，设$\frac{m_2}{m_1}=\lambda$，则由定比分点坐标公式得点 P 坐标(x,y)，则

$$\begin{cases}x=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\\ y=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\end{cases}$$

一般的，求两个或两个以上质点的质量中心，都是先求某两点的质量中心，然后求这两点的质量中心与第三点的质量中心，依此类推，进而求所有点的质量中心.

例 9 在半径为 15 cm 的均匀薄圆铁板上挖去一个圆洞，已知圆洞的圆心和铁板的中心相距 8 cm，圆洞的半径是 5 cm，求挖去圆洞后剩下的空心圆铁板的重心的位置.

解 设挖去圆洞的圆心为 O_1，薄圆铁板的圆心为 O_2，则空心圆铁板的重心 O_3 在直线 O_1O_2 上.以两圆连心线为 x 轴，挖去的小圆洞的圆心 O_1 为坐标原点建立直角坐标系，如图 7.90，则 $O_2(8,0)$，设 $O_3(x,0)$.因为挖去小圆铁板的面积为 $25\pi\ \text{cm}^2$，设其质量为 m_1 的空心圆铁板的面积为 $225\pi-25\pi=200\pi(\text{cm}^2)$，设其质量为 m_2，则

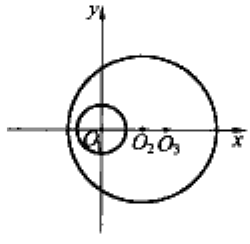


图 7.90

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{200\pi}{25\pi}=8$$

因为 O_1,O_2,O_3 三点共线，设 O_2 分$\overrightarrow{O_1O_3}$的定比为 λ，则

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{\overrightarrow{O_2O_3}}=\frac{m_2}{m_1}=8$$

由定比分点坐标公式得 $8=\dfrac{0+8x}{1+8}$，所以 $x=9$，即 $O_3(9,0)$，它距大圆铁板圆心 1 cm 处.

二、走进考场 15

1. 一条渔船距对岸 4 km，现正以 2 km/h 的速度向垂直于对岸的方向划去，到达对岸 h，船的实际航程为 8 km，求河水的流速.

2. 一轮船要从 A 处驶往正东方向 200 海里的 B 处，此时有东北风，风速为 $5\sqrt{2}$海里/h，若要求该船在 5 h 后到达 B 处，则船应以怎样的速度沿何方向航行？（精确到 0.01）

3. 如图 7.91，若物体所受重力为 $\boldsymbol{G}$，被两根不等长的绳子吊起，绳子两端点 A 和 B 保持同一高度，且绳子与竖直方向的夹角分别为 α 和 β，试研究拉力 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 的大小.

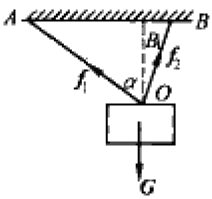


图 7.91

4. 已知力 $\boldsymbol{F}$ 与水平方向的夹角为 30°（斜向上），$\boldsymbol{F}$ 的大小为 50 N，$\boldsymbol{F}$ 拉着一个重 80 N 的木块在摩擦因数 $\mu=0.02$的水平平面上运动了 20 m，问 $\boldsymbol{F}$，摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功分别为多少？

5. 已知三点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$分别在点 A，B，C 处挂上质量为 m_1，m_2，m_3 的物体，求此三个物体的联合质心.

三、答案与提示

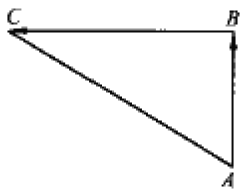


图 7.92

1. $2\sqrt{3}$km/h　提示：船航行时间为 2 h，如图 7.92，$\overrightarrow{AB}$表示船的速度，$\overrightarrow{BC}$为水流速度，$\overrightarrow{AC}$为渔船实际航行速度$|\overrightarrow{AC}|=8\div2=4$ km/h

2. 沿东偏南 8.13°方向以 35.36 海里/时的速度航行.　提示：以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系，令$\angle BOD=\theta$，则$\overrightarrow{OB}=(200,0)$，$\overrightarrow{OC}=(25,25)$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(175-25)$

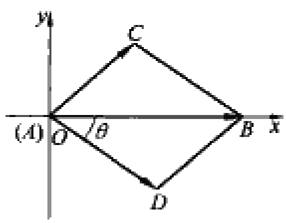


图 7.93

3. $\dfrac{|\boldsymbol{G}|}{\cos\alpha+\sin\alpha\cot\beta}$和$\dfrac{|\boldsymbol{G}|}{\cos\beta+\sin\beta\cot\alpha}$　提示：以力的作用点 O 为原点建立直角坐标系，将 $\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$ 分别分解为水平方向和竖直方向上的力 $\boldsymbol{f}_{1x}$，$\boldsymbol{f}_{1y}$，$\boldsymbol{f}_{2x}$，$\boldsymbol{f}_{2y}$，则 $\boldsymbol{f}_{1x}+\boldsymbol{f}_{1y}=\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_{2x}+\boldsymbol{f}_{2y}=\boldsymbol{f}_2$，即 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{f}_1$，$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{f}_2$. 由受力平衡知，物体在水平方向和竖直方向上受力平衡，即$\begin{cases}\boldsymbol{f}_{1x}=-\boldsymbol{f}_{2x}\\ \boldsymbol{f}_{1y}+\boldsymbol{f}_{2y}=-\boldsymbol{G}\end{cases}$，所以$\begin{cases}|\boldsymbol{f}_1|\sin\alpha=|\boldsymbol{f}_2|\sin\beta\\ |\boldsymbol{f}_1|\cos\alpha+|\boldsymbol{f}_2|\cos\beta=|\boldsymbol{G}|\end{cases}$

4. $500\sqrt{3}$ J, -22 J　提示:设木块位移为 $\boldsymbol{S}$,则 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=500\sqrt{3}$ (J), F 在铅直方向上的分力大小为 $|\boldsymbol{F}|\cdot\sin 30^\circ=25$ (N),则摩擦力 f 大小为 $|\boldsymbol{f}|=(80-25)\times 0.02=1.1$ (N),所以 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos 180^\circ=-22$ (J)

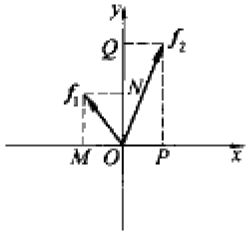


图 7.94

5. $\left(\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$
提示:设点 B,C 两处物体的联合质心为 $E(x_E,y_E)$,点 E 在 BC 上,且 $m_2\overrightarrow{BE}=m_3\overrightarrow{EC}$,故 $x_E=\dfrac{x_2+\dfrac{m_3}{m_2}x_3}{1+\dfrac{m_3}{m_2}}=\dfrac{m_2x_2+m_3x_3}{m_2+m_3}$, $y_E=\dfrac{m_2y_2+m_3y_3}{m_2+m_3}$.现视 E 处质量为 m_2+m_3,设 E,A 两物体的联合质心为 $M(x,y)$,同理有 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{m_2+m_3}{m_1}\overrightarrow{ME}$

第八章　空间向量的应用

运用向量知识求解几何问题的方法称为向量法.用向量法证几何问题的一般方法是:将直线形的各边视为向量,把角转化为向量的夹角,把线段长转化为向量的模,并用已知向量表示出未知向量,从而把几何问题转化为向量问题,然后运用向量运算法则,通过向量的化简与计算,并把运算结果“翻译”成相应的几何意义,从而推证出结论或求出所要求的量.

利用向量法证题的好处是证题的思路明确,易于下手,它用定量的计算代替定性的分析,且运算也比较简单,一般不必添加辅助线,省去作角、作距离的许多麻烦,从而避免了一些繁难的推理论证.又由于解题方法步骤接近于程序化,易于掌握,因而大大降低了解题的难度,为考生快捷地求解立体几何问题开辟了一条很有效的途径.

用向量法解题的途径有两种:一种是坐标法,即通过建立空间直角坐标系,确定出一些点的坐标进而求出向量的坐标,再进行坐标运算;另一种是基底法,即先选择基向量(除要求不共面外,还要能够便于表示所求的目标向量,并优先选择相互夹角为已知的向量作为基底,如常选在几何体上共点而不共面的三条棱所在的向量为基底),然后将有关向量用基向量表示,并进行向量运算.其中第一种方法用的较多,也比较容易,特别是遇到所给立体图形是正方体、长方体、直棱柱或有侧棱垂直于底面的棱锥时常用第一种方法;而对于不宜建立空间直角坐标系的题目,如所给立体图形是平行六面体时常用第二种方法.

用向量法不仅可以证点共线、线共点、线(或点)共面、两直线(或线与面、面与面)平行、两直线(或线与面、面与面)垂直的问题,还可以求空间各种角和各种距离.因此,凡涉及上述类型的问题,均可以考虑利用向量法来解,且其解法一般都比较简单.

在近几年的高考立体几何试题中,已有越来越多的试题不仅可用常规解法,而且还可以用向量解法.(近几年各省立体几何试题中几乎所有的题目都可以用向量法来解或证明!)这也是今后高考命题的趋势,应引起考生足够的重视.

第一节　向量法证明空间中点、线、面间的位置关系问题

一、高考内容

(一)空间中直线与直线之间的位置关系

1. 位置关系

- 共面直线
  - 相交直线:同一平面内有且只有一个公共点.
  - 平行直线:同一平面内,没有公共点.
- 异面直线:不同在任何一个平面内,没有公共点.

2. 平行公理:平行于同一条直线的两条直线互相平行.

3. 两直线互相垂直:如果两条异面直线所成的角是直角,那么我们就说这两条直线互相垂直,两条互相垂直的异面直线 a,b,记作 $a\perp b$.

(二)空间中直线与平面之间的位置关系

1. 位置关系

(1)直线在平面内——有无数个公共点;

(2)直线与平面相交——有且只有一个公共点;

(3)直线与平面平行——没有公共点.

直线与平面相交或平行的情况统称为直线在平面外;直线 a 与平面 α 相交于点 A,记作 $a\cap\alpha=A$;直线 a 与平面 α 平行,记作 $a/\!/\alpha$.

2. 直线和平面平行

(1)定义:一条直线和一个平面有且只有一个公共点,叫直线与平面相交,这个公共点叫直线与平面的交点.一条直线与一个平面没有公共点,叫直线与平面平行.直线 a 平行于平面 α,记作 $a/\!/\alpha$.

(2)判定定理:如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行.

(3)性质定理:如果一直线与一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线与交线平行.

3. 直线和平面垂直

(1)定义:如果一条直线和一个平面相交,并且和这个平面内的任意一条直线都垂直,我们就说这条直线和这个平面互相垂直,其中直线叫平面的垂线,平面叫直线的垂面,交点叫垂足.直线 l 和平面 α 互相垂直,记作 $l\perp\alpha$.由定义可得:①过一点有且只有一条直线与已知平面垂直;②过一点有且只有一

个平面与已知直线垂直.

(2)判定定理:如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面.

推论:如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那以另一条也垂直于这个平面.

(3)性质定理:如果两条直线同垂直于一个平面,则这两条直线平行.

4. 正射影和三垂线定理

(1)射影:自一点 P 向平面 α 引垂线,垂足 P' 叫点 P 在平面 α 内的正射影(简称射影).如果图形 F 上的所有点在一平面内的射影构成图形 F',则 F' 叫图形 F 在这个平面内的射影.

(2)斜线:如果一条直线和一个平面相交,但不和这个平面垂直,那么这条直线叫这个平面的斜线.斜线和平面的交点叫斜足.斜线上一点与斜足间的线段叫斜线段.

(3)三垂线定理:在平面内的一条直线,如果它和这两个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直.

(4)三垂线定理的逆定理:在平面内的一条直线,旭果它和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直.

(三)平面与平面之间的位置关系

1. 位置关系

(1)两个平面平行——没有公共点.

(2)两个平面相交——有一条公共直线.

2. 平面与平面平行

(1)定义:如果两个平面没有公共点,那么这两个平面互相平行,也叫平行平面.平面 α 平行于平面 β,记作 $\alpha /\!/ \beta$.

(2)判定定理:如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面,那么这两上平面平行.

推论:如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线,那么这两个平面平行.

(3)性质定理:如果两个平行平面同时与第三个平面相交,那么它们的交线平行.

3. 平面和平面垂直

(1)定义:平面角是直角的二面角叫直二面角,相交成直二面角的两个平面,叫互相垂直的平面.

(2)判定定理:如果一个平面过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面

互相垂直.

(3)性质定理:如果两个平面互相垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

二、高考要求(理科)

1.能用向量语言表达直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直、平行关系.

2.能用向量方法证明有关直线和平面位置关系的一些定理(包括三垂线定理).

3.了解向量方法在研究立体几何问题中的应用.

三、解法指导

(一)证明几点共线、几线共点、几点(线)共面的方法

1.几点共线(如点 A,B,C)的证法.

(1)先构造共始点的向量,然后证明存在非零实数 λ,使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$.(如例 1~3).

(2)证明:$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$(如例 2).

例 1 如图 8.1,已知在长方体 AC_1 中,点 M 为 DD_1 中点,点 N 在 AC 上,且 $AN:NC=2:1$,点 E 为 BM 中点,求证:A_1,E,N 三点共线.

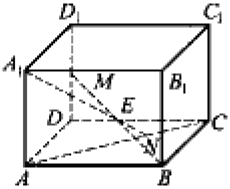


图 8.1

证明 以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系,如图 8.2 所示.设 $B(b,0,0)$,$C(b,c,0)$,$A_1(0,0,a)$,则 $\overrightarrow{AC}=(b,c,0)$,$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{2}{3}b,\frac{2}{3}c,0\right)$,所以 $N\left(\frac{2}{3}b,\frac{2}{3}c,0\right)$.因为 $D(0,c,0)$,$D_1(0,c,a)$.所以 $M\left(0,c,\frac{a}{2}\right)$,$E\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2},\frac{a}{4}\right)$.因为$\overrightarrow{A_1E}=\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2},-\frac{3}{4}a\right)$,$\overrightarrow{A_1N}=\left(\frac{2}{3}b,\frac{2}{3}c,-a\right)$,$\overrightarrow{A_1E}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1N}$,所以 A_1,E,N 三点共线.

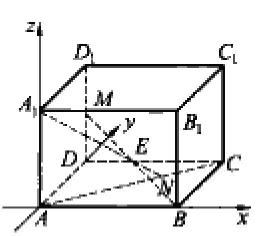


图 8.2

例 2 [2008·辽宁理一(11)、文一(12)]在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别为棱 AA_1,CC_1 的中点,则在空间中与三条直线 A_1D_1,EF,CD 都相交的直线 ( )

A. 不存在　　B. 有且只有两条　　C. 有且只有三条　　D. 有无数条

解　如图 8.3，在平面 ADD_1A_1 内延长 DE 与 D_1A_1 的延长线相交于一点 H，则 DH 为所求直线，在平面 DCC_1D_1 内，延长 D_1F 与 DC 的延长线相交于点 G，则 D_1G 为满足条件的直线，取 EF 的中点 O，则 A_1C 一定经过点 O，这样就找到满足条件的三条直线.

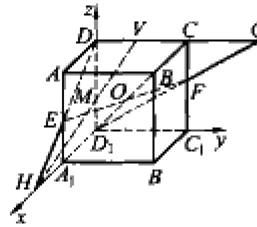


图 8.3

若取 DC 的中点 K，OE 的中点 M，A_1H 的中点 N，则 K,M,N 三点共线，下面给出证明.

以点 D_1 为坐标原点建立空间直角坐标系，如图所示，设正方体的棱长为 2，则 $K(0,1,2)$，$E(2,0,1)$，$F(0,2,1)$，$O(1,1,1)$，$M(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)$，$D(0,0,2)$. 由 $\frac{|HA_1|}{|HD_1|}=\frac{|EA_1|}{|DD_1|}=\frac{1}{2}$，得 $\frac{|HA_1|}{|HA_1|+2}=\frac{1}{2}$，所以 $|HA_1|=2$. 则 $|A_1N|=1$，所以 $N(3,0,0)$. 因为 $|KN|=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$，$|KM|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，$|MN|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，$|KN|=|KM|+|MN|$，则 K,M,N 三点共线，即 KN 满足条件. 因此找到了四条满足题意的直线，同理还可以找到更多与三条直线 A_1D_1，DC，EF 相交的直线，因此选 D.

解二　同解一，得 $K(0,1,2)$，$M(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)$，$N(3,0,0)$，因为 $\overrightarrow{KN}=(3,-1,-2)$，$\overrightarrow{MN}=(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-1)=\frac{1}{2}(3,-1,2)=\frac{1}{2}\overrightarrow{KN}$，所以 M,N,K 三点共线.

例 3　如图 8.4，在空间四边形 $ABCD$ 中，M,N 分别是 AB,CD 的中点，P 为线段 MN 的中点，Q 为 $\triangle BCD$ 的重心，求证：A,P,Q 三点共线.

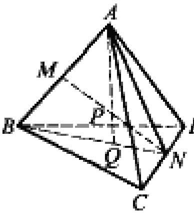


图 8.4

证明　设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，则

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}]=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}[\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})]=$$

$$\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=$$

$$a+\frac{1}{3}(b-2a+c)=\frac{1}{3}(a+b+c)=\frac{4}{3}\overrightarrow{AP}$$

故$\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{AQ}$,所以 A,P,Q 三点共线.

2. 几线共点的证法.

要证明几线共点,可先在某线上找出一定点(常是唯一的特殊点),再证其余各线都过这一定点,这时常用到如下结论:

(1)若$\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$,则点 A 与点 B 重合.

(2)若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$,则点 B 与点 C 重合.

(3)若点 G 为$\triangle ABC$ 的重心,点 P 为平面 ABC 外一点,则$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$.

例 4 证明四面体每一个顶点与对面重心所连的线段共点,且这点到顶点的距离是它到对面重心的距离的三倍.

证一 设 G_1,G_2,G_3,G_4 分别是四面体 $D-ACB$ 中四个面的重心,如图 8.5 所示,取四点 H_1,H_2,H_3,H_4 满足题设条件,即

$$\overrightarrow{AH_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1},\quad \overrightarrow{BH_2}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BG_2}$$

$$\overrightarrow{CH_3}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CG_3},\quad \overrightarrow{DH_4}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG_4}$$

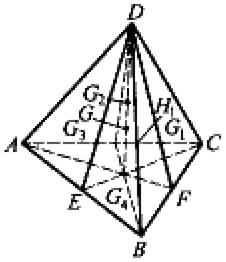


图 8.5

则

$$\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH_2}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BG_2}=$$

$$-\frac{3}{4}[\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})]+\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}[\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})]=$$

$$-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=$$

$$\frac{1}{4}(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB})+\overrightarrow{AB}=$$

$$-\frac{1}{4}[2\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})]+\overrightarrow{AB}=$$

$$-\frac{1}{4}[2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}]+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$$

所以点 H_1 与点 H_2 重合.同理可证点 H_1 与点 H_3,点 H_4 均能重合.故 H_1,H_2,H_3,H_4 是同一点,且此点到某顶点的距离是它到对面重心距离的三倍.

证二 设 G_1,G_2,G_3,G_4 分别是四面体 $D-ACB$ 中四个面的重心,取四点 H_1,H_2,H_3,H_4 满足题设条件,因为

$$\overrightarrow{AH_2}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH_2}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BG_2}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\right]=$$

$$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=$$

$$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=$$

$$\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\overrightarrow{AH_1}=\overrightarrow{AH_1}$$

所以点 H_1 与点 H_2 重合，同理，点 H_1 与点 H_3，点 H_4 重合，即四线共点，且此点到某顶点的距离是它到对面重心距离的三倍.

3. 几点共面的证法.

要证明几点（如 A,B,C,D）共面，则用以下方法解题.

(1)可先作出从同一点出发的三个向量（如$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$），然后证明存在两个实数 x,y，会使得$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$（如例 3）；或对空间任一定点 O，存在两个实数 x,y，会使得$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$；或证明存在三个不全为零的实数 λ,μ,ν，会使得 $\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}+\nu\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$ 或$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$（其中 O 为空间任一定点，$\lambda+\mu+\nu=1$）. 此时常要用到待定系数法.（如例 3、例 4）

(2)设 $\boldsymbol{n}$ 量经平面 ABC 的任意一个法向量，则 A,B,C,D 四点共面$\Leftrightarrow$直线 AD 在平面 ABC 内$\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}\perp\boldsymbol{n}$.

(3)转化为证明$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$.

例 5　[2008·四川文理三(19)]平面 $ABEF\perp$平面 $ABCD$，四边形 $ABEF$ 与 $ABCD$ 都是直角梯形，$\angle BAD=\angle FAB=90°$，$BC \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AD$，$BE \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AF$.

[理科]证明 C,D,F,E 四点共面.

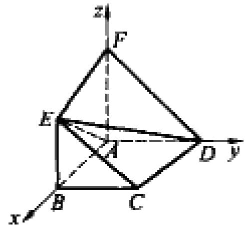


图 8.6

证明　由平面 $ABEF\perp$平面 $ABCD$，$AF\perp AB$，得 $FA\perp$平面 $ABCD$，以 A 为坐标原点，建立的空间直角坐标系，如图 8.6 所示.

设 $AB=a$，$BC=b$，$BE=c$，则 $B(a,0,0)$，$C(a,b,0)$，$E(a,0,c)$，$D(0,2b,0)$，$F(0,0,2c)$.

证一　$\overrightarrow{CD}=(-a,b,0)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-b,c)$，$\overrightarrow{CF}=(-a,-b,2c)$，设 $\overrightarrow{CF}=x\overrightarrow{CD}+y\overrightarrow{CE}=(-ax,b(x-y),cy)$，则 $\begin{cases}-a=-ax\\-b=b(x-y)\\2c=cy\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$，所以$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CE}$，则 C,D,F,E 四点共面.

证二　$\boldsymbol{n}(x,y,x)$为平面 ECD 的一个法向量，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CD}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CE}$，得

$\begin{cases} -ax+by=0 \\ -by+cz=0 \end{cases}$，令 $y=a$，得 $x=b$，$z=\frac{ab}{c}$，所以 $\boldsymbol{n}=(b,a,\frac{ab}{c})$。因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=-ab-ab+2ab=0$，所以 $\overrightarrow{CF}\perp\boldsymbol{n}$，则 F 在平面 ECD 内，即 C,D,F,E 四点共面.

证三 $\overrightarrow{CE}=(0,-b,c)$，$\overrightarrow{DF}=(0,-2b,2c)=2\overrightarrow{CE}$，$E\notin FD$，所以 $CE/\!/DF$，则 C,D,F,E 四点共面.

例 6 已知 P 是平面四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，联结 PA,PB,PC,PD，点 E,F,G,H 分别为 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCD$，$\triangle PDA$ 的重心，求证：E,F,G,H 四点共面.

证一 如图 8.7，分别延长 PE,PF,PG,PH 交对边于点 M,N,Q,R。因为 E,F,G,H 分别是所在三角形的重心，所以 M,N,Q,R 为所在边的中点，顺次联结 M,N,Q,R 所得四边形为平行四边形，且有 $\overrightarrow{PE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{PF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PR}$。因为 $MNQR$ 为平行四边形，所以

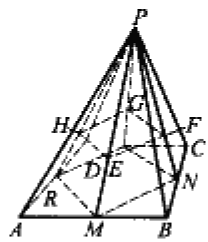


图 8.7

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG}&=\overrightarrow{PG}-\overrightarrow{PE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}-\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PM})=\\&\frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MR})=\\&\frac{2}{3}(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PM})=\\&\frac{2}{3}(\frac{3}{2}\overrightarrow{PF}-\frac{3}{2}\overrightarrow{PE})+\frac{2}{3}(\frac{3}{2}\overrightarrow{PH}-\frac{3}{2}\overrightarrow{PE})=\\&(\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE})+(\overrightarrow{PH}-\overrightarrow{PE})=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\end{aligned}$$

则 E,F,G,H 四点共面.

证二 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM})=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{PG}-\overrightarrow{PH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}-\frac{2}{3}\overrightarrow{PR}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR})=\frac{2}{3}\overrightarrow{RQ}$$

因为 $MNQR$ 为平行四边形，所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{RQ}$，则 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$，所以 $EF \mathrel{\underline{/\!/}} HG$。则 E,F,G,H 四点共面.

例 7 如图 8.8，设 A,B,C 及 A_1,B_1,C_1 分别是异面直线 l_1,l_2 上的三点，而 M,N,P,Q 分别是线段 AA_1,BA_1,BB_1,CC_1 的中点，求证：M,N,P,Q 四点共面.

证明 依题意有$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1}$，所以$\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{NM}$，$\overrightarrow{A_1B_1}=2NP$. 又因为

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1}) \qquad ①$$

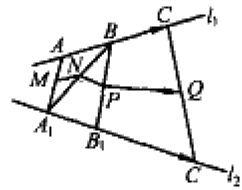


图 8.8

A,B,C 及 A_1,B_1,C_1 分别共线，所以

$$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}=2\lambda\overrightarrow{NM},\quad \overrightarrow{B_1C_1}=\omega\overrightarrow{A_1B_1}=2\omega\overrightarrow{NP}$$

将上式代入式①得

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(2\lambda\overrightarrow{NM}+2\omega\overrightarrow{NP})=\lambda\overrightarrow{NM}+\omega\overrightarrow{NP}$$

则

$$\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{NM}+\omega\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{NM}+(\omega+1)\overrightarrow{NP}$$

所以$\overrightarrow{NQ}$，$\overrightarrow{NM}$，$\overrightarrow{NP}$共面，则 M,N,P,Q 四点共面.

注意 $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1})$的①证明如下：如图 8.9，过 B_1 作 $B_1C' \underline{\underline{/\!/}} BC$，联结 CC'，则 $BCC'B_1$ 为平行四边形，所以 $CC' \underline{\underline{/\!/}} BB_1$，联结 C_1C'，设 Q' 为 C_1C' 中点，联结 B_1Q'，QQ'，则

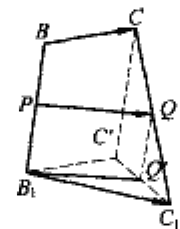


图 8.9

$$QQ' \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CC' \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}BB_1=PB_1$$

所以 $PB_1Q'Q$ 为平行四边形，则 $B_1Q' \underline{\underline{/\!/}} PQ$. 因为

$$\overrightarrow{B_1Q'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1C'}+\overrightarrow{B_1C_1})$$

所以

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1C'}+\overrightarrow{B_1C_1})=\frac{1}{2}(BC+\overrightarrow{B_1C_1})$$

4. 几线共面的证法.

(1)要证明两线(AB 与 CD)共面，只需证$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$；(2)要证明三线($AB$，$CD$，$EF$)共面，可证明存在两个非零实数 λ,μ，会使得$\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{CD}$.

例 8 已知：E,F,G,H,K,L 分别为正方体 AC_1 的棱 AA_1，AB，BC，CC_1，C_1D_1，A_1D_1 的中点，求证：$EFGHKL$ 是平面六边形.

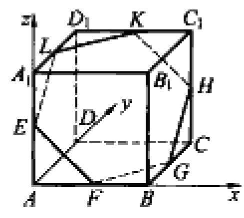


图 8.10

证明 以 A 为坐标原点，建立如图 8.10 所示的空间直角坐标系，并设正方体棱长为 2，则 $E(0,0,1)$，$F(1,0,0)$，$G(2,1,0)$，$H(2,2,1)$，$K(1,2,2)$，$L(0,1,2)$，

$\overrightarrow{EF}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{EH}=(0,1,1,)$，$\overrightarrow{KL}=(-1,-1,0)$. 设$\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{GH}+y\overrightarrow{KL}$，则$(1,0,-1)=(-y,x-y,x)$，所以$x=-1$，$y=-1$，即$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{KL}$，所以$EF,GH,KL$三线共面. 设为$\alpha$，因为$F,G,H,K,L,E$在平面$\alpha$内，所以$FG$，$HK$，$LE$也在平面$\alpha$内，因此$EFGHKL$为平面六边形.

(二)证明直线和直线平行的方法

转化为证两向量共线. 设a,b是两条不重合的直线，它们的方向向量分别为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq0)$.

注意 向量共线(也称向量平行)与直线平行有区别，直线平行不包括重合的情形，而向量平行则包括重合的情形，因此还须证：一直线上必有一点在另一直线外.

例9 如图8.11，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，MN是异面直线A_1D与AC的公垂线段.

求证：$MN/\!/BD_1$.

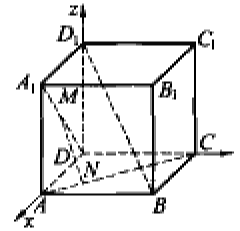


图8.11

证明 以D为坐标原点建立空间直角坐标系.

设正方体棱长为a，则$A(a,0,0)$，$C(0,a,0)$，$B(a,a,0)$，$A_1(a,0,a)$，$D_1(0,0,a)$. 则$\overrightarrow{DA_1}=(a,0,a)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,a,0)$. 设$A_1D$，$AC$的公垂线方向上的向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由$\overrightarrow{DA_1}\perp\boldsymbol{n}$，$\overrightarrow{AC}\perp\boldsymbol{n}$得$\begin{cases}ax+az=0\\-ax+ay=0\end{cases}$，取$z=-1$，得$x=1$，$y=1$，所以$\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$. 因为$\overrightarrow{BD_1}=(-a,-a,a)=-a(1,1,-1)=-a\boldsymbol{n}$，所以$\overrightarrow{BD_1}/\!/\boldsymbol{n}$，因为$B_1\notin MN$，所以$MN/\!/BD_1$.

(三)证明直线和平面平行的方法

1. 转化为证明直线和平面内的某一直线平行(如例10～12).

2. 利用共面向量定理. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为平面$\alpha$内不共线的两个向量，证明存在两个实数$x,y$，会使得$\boldsymbol{l}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则$l/\!/\alpha$.(如例13、例14).

注意 还须说明$l\not\subset\alpha$.

3. 转化为证明直线的方向向量与平面的法向量垂直(此方法最常用).

设直线l的方向向量为$\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{n}$为平面α的法向量，那么$l/\!/\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0$，且直线$l$上至少有一点$A\notin\alpha$(若$l$上至少有一点$A\in\alpha$，则$l\subset\alpha$).(如例15).

例10 [2006·北京理三(17)]在底面为平行四边形的四棱锥$P-ABCD$中，$AB\perp AC$，$PA\perp$平面$ABCD$，且$PA=AB$，点E是PD的中点.

(1)求证：$AC\perp PB$；

(2)求证：$PB/\!/$平面AEC；

(3)求二面角 $E-AC-B$ 的大小.

证明　(1)建立空间直角坐标系,如图8.12所示.设 $AC=a,PA=b$.则有 $A(0,0,0),B(0,b,0),C(a,0,0),P(0,0,b)$,所以 $\overrightarrow{AC}=(a,0,0)$,$\overrightarrow{PB}=(0,b,-b)$,因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,所以 $AC\perp PB$.

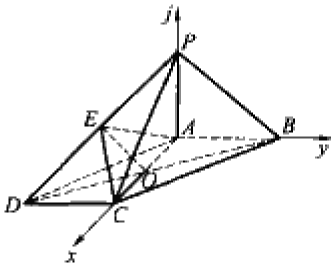


图8.12

(2)**证一**　联结 BD 交 AC 于点 O,联结 EO.由已知得 $D(a,-b,0),E(\frac{a}{2},-\frac{b}{2},\frac{b}{2}),O(\frac{a}{2},0,0)$,所以 $\overrightarrow{EO}=(0,\frac{b}{2},-\frac{b}{2})$.又 $\overrightarrow{PB}=(0,b,-b)$,所以 $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{EO}$,则 $PB\parallel EO$.又 $PB\not\subset$ 平面 AEC,$EO\subset$ 平面 AEC,所以 $PB\parallel$ 平面 AEC.

证二　由已知得 $D(a,-b,0),E(\frac{a}{2},-\frac{b}{2},\frac{b}{2})$.设平面 AEC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$.由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$ 得 $\begin{cases}\frac{a}{2}x_0-\frac{b}{2}y_0+\frac{b}{2}z_0=0\\ ax_0=0\end{cases}$.取 $x_0=0,y_0=z_0=1$,得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$.因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0$,所以 $\overrightarrow{PB}\perp\boldsymbol{n}$,则 $PB\parallel$ 平面 AEC.

(3)取 BC 中点 G,则 $\angle EOG$ 为二面角 $E-AC-B$ 的平面角,$\angle EOG=135°$.

例11　[2005·湖北理一(10)]如图8.13,在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中,点 E,F,H,K 分别为 $AC',CB',A'B,B'C'$ 的中点,G 为△ABC 的重心,从 K,H,G,B' 中取一点作为 P,使得该棱柱恰有两条棱与平面 PEF 平行,则 P 为　　(　　)

A. K　　B. H

C. G　　D. B'

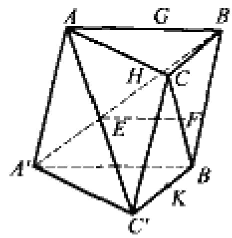


图8.13

解　设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$,则

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}),\quad \overrightarrow{AK}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$$

所以 $EF\parallel AB,EF\parallel A'B'$.当取 K 作为点 P 时

$$\overrightarrow{KE}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}),\quad \overrightarrow{KF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$$

所以

$$KF /\!/ AA', \quad KF /\!/ BB', \quad KF /\!/ CC'$$

此时棱柱有5条棱与平面 KEF 平行，所以A不合题意.

当取 H 作为点 P 时

$$\overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}), \quad \overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

所以

$$HE /\!/ BC, \quad HE /\!/ B'C', \quad HF /\!/ AC, \quad HF /\!/ A'C'$$

此时棱柱有6条棱与平面 HEF 平行，所以B不合题意.

当取 G 作为点 P 时

$$\overrightarrow{GE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{GF}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$$

此时棱柱只有两条棱与平面 GEF 平行，所以应选C.

例12 如图8.14，已知 P 是正方形 $ABCD$ 所在平面外一点，M，N 分别是 PA，BD 上的点，且 $PM:MA=BN:ND=5:8$，求证：直线 $MN /\!/$ 平面 PBC.

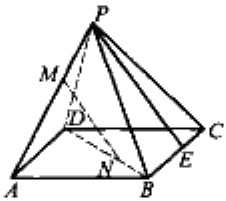


图8.14

证明 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BN}=$

$$-\frac{5}{13}\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\frac{5}{13}\overrightarrow{BD}=$$

$$-\frac{5}{13}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP})+\overrightarrow{PB}+\frac{5}{13}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=$$

$$\frac{5}{13}\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BP}+\frac{5}{13}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{13}\overrightarrow{BC}-\frac{8}{13}\overrightarrow{BP}=\frac{8}{13}(\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})$$

在 BC 上取点 E，使 $BE=\frac{5}{8}BC$，于是

$$\overrightarrow{MN}=\frac{8}{13}(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BP})=\frac{8}{13}\overrightarrow{PE}$$

所以 $MN /\!/ PE$，又 $PE\subset$ 平面 PBC，故 $MN /\!/$ 平面 PBC.

例13 [2007·山东理三(19)]在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$，$AD\perp DC$，$AB /\!/ DC$. 设 E 是 DC 的中点，求证：$D_1E /\!/$ 平面 A_1BD.

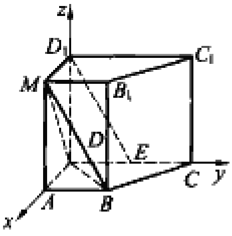


图8.15

证明 以 D 为坐标原点，建立如图8.15所示的空间直角坐标系. 设 $DA=a$，则 $A(a,0,0)$，$B(a,a,0)$，$C(0,2a,0)$，$C_1(0,2a,2a)$，$A_1(a,0,2a)$，$D_1(0,0,2a)$，

$E(0,a,0)$，所以$\overrightarrow{DE}=(0,a,-2a)$，$\overrightarrow{DA_1}=(a,0,2a)$，$\overrightarrow{DB}=(a,a,0)$，又$(0,a,-2a)=(a,a,0)-(a,0,2a)$，所以$\overrightarrow{D_1E}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA_1}$．因为 $DA_1,DB\subset$平面 A_1BD，$D,E\not\subset$平面 A_1BD，所以 $D_1E/\!/$平面 A_1BD．

证二　同上得$\overrightarrow{D_1E}=(0,a,-2a)$，$\overrightarrow{DA_1}=(a,0,2a)$，$\overrightarrow{DB}=(a,a,0)$．设平面 A_1BD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DA_1}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DB}$得$\begin{cases}ax+2az=0\\ax+ay=0\end{cases}$，令 $x=2$，得 $y=2$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(-2,2,1)$．因为$\overrightarrow{D_1E}\cdot\boldsymbol{n}=2a-2a=0$，所以$\overrightarrow{D_1E}\perp\boldsymbol{n}$，因为 $D_1E\not\subset$平面 A_1BD，所以 $D_1E/\!/$平面 A_1BD．

例 14　如图 8.16，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是 B_1D_1 的中点，求证：$B_1C/\!/$平面 ODC_1．

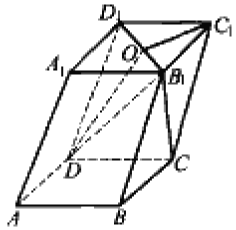


图 8.16

证明　设$\overrightarrow{C_1B_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{C_1D_1}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{C_1C}=\boldsymbol{c}$．因为 B_1BCC_1 为平行四边形，所以$\overrightarrow{B_1C}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$．又 O 是 B_1D_1 的中点，所以

$$\overrightarrow{C_1O}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{C_1D_1}-\overrightarrow{C_1O}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

因为 $D_1D \mathrel{\underline{/\!/}} C_1C$，所以$\overrightarrow{D_1D}=\boldsymbol{c}$．则

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD_1}+\overrightarrow{D_1D}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}$$

若存在实数 x,y，会使得

$$\overrightarrow{B_1C}=x\overrightarrow{OD}+y\overrightarrow{OC_1}$$

则

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=x\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\right]+y\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right]=$$
$$-\frac{1}{2}(x+y)\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(x-y)\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{c}$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，则

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)=1\\\frac{1}{2}(x-y)=0\\x=1\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$．所以

$$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC_1}$$

即$\overrightarrow{B_1C}$,$\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{OC_1}$是共面向量.因为$\overrightarrow{B_1C}$不在$\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{OC_1}$所确定的平面 ODC_1 内,所以$\overrightarrow{B_1C}$//平面 ODC_1,即 B_1C//平面 ODC_1.

例 15 [2008·安徽理三(18)、文三(19)]在四棱锥 $O-ABCD$中,底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形,$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$,$OA\perp$底面 $ABCD$,$OA=2$,M 为 OA 的中点,N 为 BC 的中点.证明:直线 MN//平面 OCD.

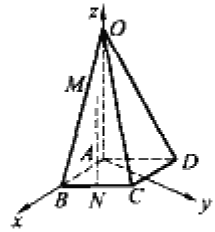


图 8.17

证明 以 A 为坐标原点,建立如图 8.17 所示的空间直角坐标系,则 $B(1,0,0)$,$O(0,0,2)$,$M(0,0,1)$.过点 D 作 $DD'\perp AB$ 于点 D'.由$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$得

$$AD'=DD'=1\times\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

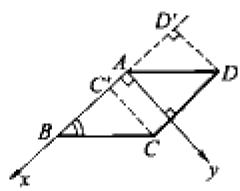


图 8.18

所以 $D(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$.同理 $C(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$.所以 $N(1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},0)$,$\overrightarrow{MN}=(1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},-1)$,$\overrightarrow{OD}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$,$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$.

设平面 OCD 的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OD_1}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CD}$,得

$$\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-2z=0\\-x=0\end{cases}$$

令 $y=4$ 得$\begin{cases}x=0\\y=4\\z=\sqrt{2}\end{cases}$,所以 $\boldsymbol{n}=(0,4,\sqrt{2})$.因为$\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0+\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$,$MC\not\subset$平面 OCD,所以 MN//平面 OCD.

(四)证明平面与平面平行的方法

1.证明两平面内有两条相交直线分别平行.(如例 16 证一、例 17).

2.转化为证两平面的法向量平行(常用此方法).(如例 16 证二)

例 16 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M,N,P 分别是 C_1C,B_1C_1,C_1D_1 中点.求证平面 MNP//平面 A_1BD.

证一 以 D_1 为坐标原点,建立空间直角坐标系如图 8.19 所示.设正方体棱长为 a,则 $A_1(a,0,0)$,$B(a,a,a)$,$D(0,0,a)$,$C_1(0,a,0)$,$B_1(a,a,0)$,

$C(0,a,a)$，$M\left(0,a,\frac{a}{2}\right)$，$N\left(\frac{a}{2},a,0\right)$，$P\left(0,\frac{a}{2},0\right)$. 因为

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{A_1D}=(-a,0,a)=-2\left(\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2}\right)=-2\,\overrightarrow{MN}$$

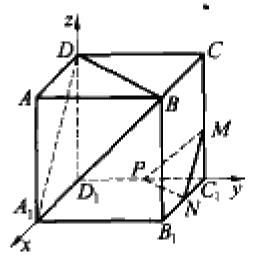


图 8.19

所以$\overrightarrow{MN}\parallel\overrightarrow{A_1D}$. 即 $MN\parallel A_1D$，又因为$\overrightarrow{PN}=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BD}=(-a,-a,0)=-2\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)=-2\,\overrightarrow{PN}$，所以$\overrightarrow{PN}\parallel\overrightarrow{BD}$，即 $PN\parallel BD$. 因为$MN\cap PN=N$，$A_1D\cap BD=D$，所以平面 $MNP\parallel$平面 A_1BD.

证二 设平面 MNP 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，由$\overrightarrow{MN}\perp\boldsymbol{n}_1$，$\overrightarrow{PN}\perp\boldsymbol{n}_1$ 得 $\begin{cases}\frac{a}{2}x_1-\frac{a}{2}z_1=0\\ \frac{a}{2}x_1+\frac{a}{2}y_1=0\end{cases}$，令 $z_1=1$ 得 $x_1=1$，$y_1=-1$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$. 设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，由$\overrightarrow{A_1D}\perp\boldsymbol{n}_2$，$\overrightarrow{BD}\perp\boldsymbol{n}_2$ 得$\begin{cases}-ax_2+az_2=0\\ -ax_2-ay_2=0\end{cases}$，令 $z_2=1$，得 $x_2=1$，$y_2=-1$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,1)$. 因为 $\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$，所以平面 $MNP\parallel$平面 A_1BD.

例 17 如图 8.20，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别是 A_1D_1，D_1D_1，D_1C_1 的中点，求证：平面 $EFG\parallel$平面 AB_1C.

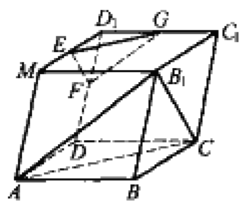


图 8.20

证明 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则

$$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED_1}+\overrightarrow{D_1G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$$

而

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

所以$\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{EG}$，故$\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{EG}$，即 $EG\parallel AC$. 又

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED_1}+\overrightarrow{D_1F}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1D}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=2\,\overrightarrow{EF}$$

所以$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{B_1C}$，即 $EF\parallel B_1C$. 又因为 $FG\cap EF=F$，$AC\cap B_1C=C$，所以平面 $EFG\parallel$平面 AB_1C.

（五）证明直线和直线垂直的方法

设直线 a,b 的方向向量为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则 $a\perp b\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

这里要特点指出的是：用向量法证明两直线尤其是两异面直线垂直是非常有效的方法.

注意　若直线 a 的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 较难求出时，可寻找与直线 a 平行的直线 c，用 $\boldsymbol{c}$ 代替 $\boldsymbol{a}$，改证 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$（如例 19）.

例 18　［2007·全国卷Ⅰ文理三(19)］在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$，已知 $\angle ABC=45^\circ$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$SA=SB=\sqrt{3}$. 证明：$SA\perp BC$.

证明　(1) 作 $SO\perp BC$ 于点 O，联结 AO，由侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$，得 $SO\perp$ 平面 $ABCD$. 因为 $SA=SB$，所以 $AO=BO$，又 $\angle ABC=45^\circ$，所以 $\angle OAB=45^\circ$，则 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，$AO\perp OB$，以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.21. 因为

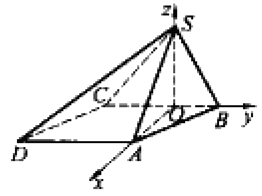


图 8.21

$$|AO|=|BO|=|AB|\sin 45^\circ=\sqrt{2}$$

所以 $A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$C(0,-\sqrt{2},0)$. 因为

$$|SO|=\sqrt{|SB|^2-|OB|^2}=\sqrt{3-2}=1$$

所以

$$S(0,0,1),\quad \overrightarrow{SA}=(\sqrt{2},0,-1),\quad \overrightarrow{CB}=(0,2\sqrt{2},0)$$
$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{CB}=0+0+0=0$$

所以 $SA\perp BC$.

例 19　［2004·重庆文、理三(19)］四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AE\perp PD$，$EF/\!/CD$，$AM=EF$. 证明：MF 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线.

解　以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系，如图 8.22. 设正方形 $ABCD$ 边长为 a，$AP=c$，则 $B(a,0,0)$，$P(0,0,C)$，$D(0,a,0)$，$C(a,a,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,a,-c)$. 设 $E(0,y,z)$，$\overrightarrow{AE}=(0,y,z)$，设 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PD}$，则 $(0,y,z-c)=(0,a\lambda,-c\lambda)$，即 $\begin{cases}y=a\lambda\\ z=c(1-\lambda)\end{cases}$，由 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{PD}$ 得 $ay-cz=0$，即

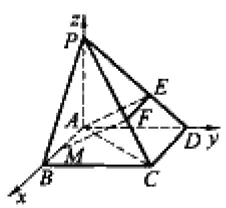


图 8.22

$$a^2\lambda-c^2(1-\lambda)=0$$

解得 $\lambda=\dfrac{c^2}{a^2+c^2}$. 所以 $E\left(0,\dfrac{ac^2}{a^2+c^2},\dfrac{ca^2}{a^2+c^2}\right)$. 因为 $EF /\!/ CD$, 所以 $\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{PE}{PD}=\lambda$, 则 $|EF|=\lambda|CD|=\dfrac{ac^2}{a^2+c^2}$. 因为 $AM=EF=\dfrac{ac^2}{a^2+c^2}$, 所以 $M\left(\dfrac{ac^2}{a^2+c^2},0,0\right)$.
设 $F(x,y,z)$, 则

$$\overrightarrow{EF}=\left(x,y-\frac{ac^2}{a^2+c^2},z-\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right),\quad \overrightarrow{CD}=(-a,0,0)$$

因为 $EF /\!/ CD$, 设 $\overrightarrow{EF}=\mu\overrightarrow{CD}$, 即

$$\left(x,y-\frac{ac^2}{a^2+c^2},z-\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)=(-a\mu,0,0)$$

所以

$$x=-a\mu,y=\frac{ac^2}{a^2+c^2},z=\frac{a^2c}{a^2+c^2}$$

即

$$F\left(-a\mu,\frac{ac^2}{a^2+c^2},\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right),\quad \overrightarrow{PF}=\left(-a\mu,\frac{ac^2}{a^2+c^2},\frac{-c^3}{a^2+c^2}\right),\quad \overrightarrow{PC}=(a,a,-c)$$

因为 P,F,C 三点共线, 所以

$$\frac{-a\mu}{a}=\frac{\dfrac{ac^2}{a^2+c^2}}{a}=\frac{\dfrac{-c^3}{a^2+c^2}}{-c},\quad \mu=-\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

所以

$$\left(\frac{ac^2}{a^2+c^2},\frac{ac^2}{a^2+c^2},\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right),\quad \overrightarrow{MF}=\left(0,\frac{ac^2}{a^2+c^2},\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right),\quad \overrightarrow{AB}=(a,0,0)$$

因为 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$, $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$, 所以 $MF\perp AB$, $MF\perp PC$, 即 MF 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线.

例 20　如图 8.23, 已知空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线的长都等于 a, 点 M,N 分别是边 AB,CD 的中点, 求证: MN 为 AB 和 CD 的公垂线.

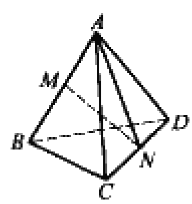


图 8.23

证明　设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{r}$, 由已知 $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{r}|=a$, 且 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 三向量两两夹角均为 60°, 则

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})$$

因为

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{p}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^2)=$$

$$\frac{1}{2}(a^2\cos 60° + a^2\cos 60° - a^2) = 0$$

所以 $MN\perp AB$. 同理 $MN\perp CD$. 因此 MN 为 AB 和 CD 的公垂线.

* **例 21** 求证:四面体三组对棱两两垂直的充分必要和件是:各对棱的平方和相等.

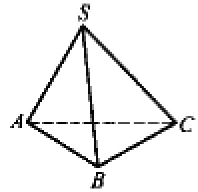


图 8.24

证明 如图 8.24,设 $\overrightarrow{SA}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{SB}=\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{SC}=\boldsymbol{e}_3$. 因为

$$SA^2+BC^2=SB^2+AC^2=SC^2+AB^2\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{SC}^2+\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$$
$$\boldsymbol{e}_1^2+(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2)^2=(\boldsymbol{e}_2^2)+(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1)^2=$$
$$\boldsymbol{e}_3^2+(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)^2\Leftrightarrow\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\Leftrightarrow$$
$$\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)\Leftrightarrow\overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{SB}\perp\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{SC}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow SA\perp BC,\quad SB\perp AC,\quad SB\perp AB$$

所以 $SA\perp BC$, $SB\perp AC$ 且 $SC\perp AB$ 的充要条件是

$$SA^2+BC^2=SB^2+AC^2=SC^2+AB^2$$

(六)证明直线与平面垂直的方法

1. 证明直线和平面内的两相交直线垂直.(如例 22 ~ 25)

2. 证明直线和平面内的任一直线垂直.(如例 26)

3. 转化为证明直线与平面的法向量共线.(这是最常用的方法,如例 24 证二、例 27).

注意 若要证与平面 α 垂直的直线 a 的方向向量数难求出时,可寻找与 a 平行的直线 b,改证 b 与平面 α 垂直.(如例 22)

例 22 [2008·江西文理三(20)]正三棱锥 $O-ABC$ 的三条侧棱 OA, OB, OC 两两垂直,且长度均为 2. E, F 分别是 AB, AC 的中点, H 是 EF 的中点,过 EF 的一个平面与侧棱 OA, OB, OC 或其延长线分别相交于 A_1, B_1, C_1. 已知 $OA_1=\frac{3}{2}$. 求证: $B_1C_1\perp$ 平面 OAH.

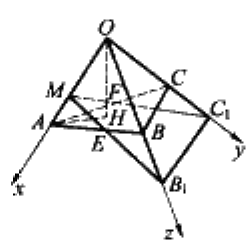


图 8.25

证明 以 O 为坐标原点,建立如图 8.25 所示的空间直角坐标系,则 $A(2,0,0)$, $B(0,0,2)$, $C(0,2,0)$, $E(1,0,1)$, $F(1,1,0)$, $H(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,所以

$$\overrightarrow{AH}=(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\quad \overrightarrow{OH}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\quad \overrightarrow{BC}=(0,2,-2)$$

因为

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=1-1=0,\quad \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=1-1=0$$

所以 $BC\perp$ 平面 OAH. 由 $EF/\!/BC$ 得 $EF/\!/$ 平面 OB_1C_1，所以 $EF/\!/B_1C_1$，则 $B_1C_1/\!/BC$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 OAH.

例 23　[2001·上海春文理三(20)]，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别在 BB_1,DD_1 上，且 $AE\perp A_1B$，$AF\perp A_1D$. 求证：$A_1C\perp$ 平面 AEF.

证明　以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系，如图 8.26. 设 $AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$. 由已知 $B(a,0,0)$，$D(0,b,0)$，$A_1(0,0,c)$，$C(a,b,0)$，设 $E(a,0,e)$，$F(0,b,f)$，$\overrightarrow{AE}=(a,0,e)$，$\overrightarrow{AF}=(0,b,f)$，$\overrightarrow{A_1B}=(a,0,-c)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,b,-c)$，由 $AE\perp A_1B$，得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$，即 $a^2-ce=0$，由 $AF\perp A_1D$ 得 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0$，即 $b^2-cf=0$，又 $\overrightarrow{A_1C}=(a,b,-c)$，因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AE}=a^2-ce=0$，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AF}=b^2-cf=0$，所以 $\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{AF}$，即 $A_1C\perp AE$，$A_1C\perp AF$，而 $AE\cap AF=A$，所以 $A_1C\perp$ 平面 AEF.

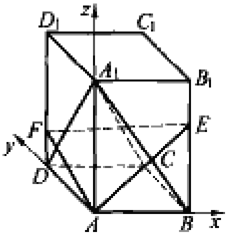


图 8.26

例 24　[2007·天津文理三(19)]在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AC\perp CD$，$\angle ABC=60°$，$PA=AB=BC$，E 是 PC 的中点.

(1)证明：$CD\perp AE$；

(2)证明：$PD\perp$ 平面 ABE.

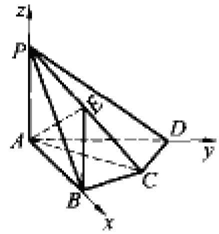


图 8.27

证明　以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系如图 8.27，设 $PA=a$，则 $P(0,0,a)$，$B(a,0,0)$，因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $C(\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$，$E(\frac{1}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{a}{2})$. 在 Rt$\triangle ACD$ 中，过点 C 作 $CH\perp AD$ 于 H，则 $AC^2=AH\cdot AD$，所以 $AD=\dfrac{a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}a$，则 $D(0,\frac{2}{\sqrt{3}}a,0)$.

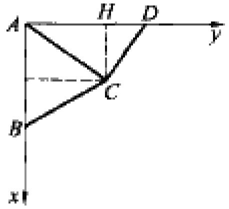


图 8.28

(1)$\overrightarrow{CD}=(-\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{6}a,0)$，$\overrightarrow{AE}=(\frac{1}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{a}{2})$. 因为 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{8}a^2+0=0$，所以 $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AE}$，即 $CD\perp AE$.

(2)证一　$\overrightarrow{PD}=(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}a,-a)$，$\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$. 因为 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，所以 $\overrightarrow{PD}\perp\overrightarrow{AB}$，即 $PD\perp AB$. 又因为 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2=0$，所以 $\overrightarrow{PD}\perp\overrightarrow{AE}$，即 $PD\perp$

AE.因为 AB,AE 是平面 ABE 内两条相交直线,所以 $PD\perp$ 平面 ABE.

证二 同上,$\overrightarrow{PD}=(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}a,-a)$,$\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$,$\overrightarrow{AE}=(\frac{1}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{a}{2})$.设$\triangle ABE$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AE}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$ 得 $\begin{cases}\frac{1}{4}ax+\frac{\sqrt{3}}{4}ay+\frac{a}{2}z=0\\ ax=0\end{cases}$.令 $y=2\sqrt{3}$,得$\begin{cases}x=0\\ y=2\sqrt{3}\\ z=-3\end{cases}$,所以 $\boldsymbol{n}=(0,2\sqrt{3},-3)$.因为 $\overrightarrow{PD}=\frac{a}{3}\boldsymbol{n}$,所以$\overrightarrow{PD}/\!/\boldsymbol{n}$,则 $PD\perp$平面 ABE.

例 25 已知$\triangle ADB$ 与$\triangle ADC$ 都是以 D 为直角顶点的直角三角形,且 $AD=BD=CD$,$\angle BAC=60°$.

(1)求证:$BD\perp AC$;(2)若 H 是$\triangle ABC$ 的重心,求证:点 H 是点 D 在平面 ABC 内的射影.

证明 (1)证明略.

(2)不妨设 $AD=BD=CD=1$.因为$\triangle ADB$ 与$\triangle ADC$ 是等腰直角三角形,所以 $AB=AC=\sqrt{2}$.因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=\\ &\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\\ &\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\\ &1\times\sqrt{2}\cos 45°-1\times\sqrt{2}\cos 45°=0\end{aligned}$$

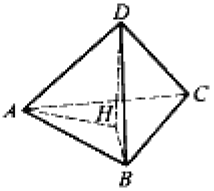


图 8.29

所以 $DH\perp BC$,又

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

所以 $DH\perp AC$,又 $AC\cap BC=C$,所以 $DH\perp$平面 ABC,即点 H 是点 D 在平面 ABC 内的射影.

例 26 证明:若直线 $l/\!/m$,$l\perp$平面 α,则 $m\perp$平面 α.

证明 如图 8.30,在平面 α 内任取一直线 g,在 l,m,g 上分别取方向向量 $\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{g}$,由于 $l\perp\alpha$,故 $l\perp g$,即有 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=0$.因为 $l/\!/m$,故存在非零实数 λ,使 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{l}$,所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{g}=(\lambda\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{g}=\lambda(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g})=0$.因此 $m\perp g$,也就是说,直线 m 垂直于α 内任一直线,故 $m\perp\alpha$.

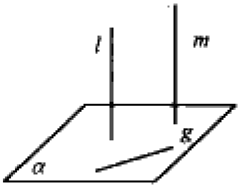


图 8.30

例 27 在三棱锥 $S-BC$ 中,$\angle ASB=\angle BSC\angle=\angle CSA=90°$,$O$ 为$\triangle ABC$ 的垂心,求证:$SO\perp$平面 ABC.

证明 以 S 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.31.设 $A(a,0,0)$,

$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$，则 $\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-b,c)$．设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BC}$，得 $\begin{cases}-ax_0+by_0=0\\-by_0+cz_0=0\end{cases}$，令 $x_0=b$，得 $y_0=a$，$z_0=\dfrac{ab}{c}$．所以 $\boldsymbol{n}=\left(b,a,\dfrac{ab}{c}\right)$．又设 $O(x'_0,y'_0,z'_0)$，则 $\overrightarrow{CO}=(x'_0,y'_0,z'_0-c)$，$\overrightarrow{AO}=(x'_0-a,y'_0,z'_0)$．因为 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心，所以 $CO\perp AB$，$AO\perp BC$，则 $\begin{cases}-ax'_0+by'_0=0\\-by'_0+cz'_0=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x'_0=\dfrac{b}{a}y'_0\\z'_0=\dfrac{b}{c}y'_0\end{cases}$，所以 $O\left(\dfrac{b}{a}y'_0,y'_0,\dfrac{b}{c}y'_0\right)$，$\overrightarrow{SO}=\left(\dfrac{b}{a}y'_0,y'_0,\dfrac{b}{c}y'_0\right)=\dfrac{y'_0}{a}\left(b,a,\dfrac{ab}{c}\right)=\dfrac{y'_0}{a}\cdot\boldsymbol{n}$，所以 $\overrightarrow{SO}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $SO\perp$平面 ABC．

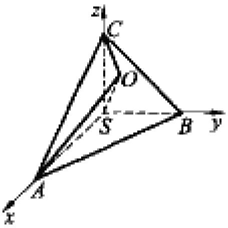


图 8.31

（七）证明平面和平面垂直的方法

1．转化为证明两平面的法向量互相垂直（这是常用方法，如例 28 证一）．

2．转化为证明一平面内的一直线垂直于另一个平面（如例 28 证二）．

3．转化为证明一平面的法向量平行于另一平面（或在平面内）．

4．作出二面角，去证二面角的平面角是直角（见向量法作空间距离，例 13．）

例 28 ［2008·陕西文理三（19）］三棱锥被平行于底面 ABC 的平面所截得的几何体的截面为 $A_1B_1C_1$，$\angle BAC=90°$，$A_1A\perp$平面 ABC，$AA_1=\sqrt{3}$．

［理科］$AB=\sqrt{2}$，$AC=2$，$A_1C_1=1$，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{1}{2}$．

［文科］$AB=AC=2A_1C=2$，D 为 BC 中点．

证明：平面 $A_1AD\perp$平面 BCC_1B_1．

证明 以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系如图 8.32，则 $B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$C_1(0,1,\sqrt{3})$．因为 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},2,0)$，所以 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{2}{3},0\right)$，则 $D\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2}{3},0\right)$，所以 $\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2}{3},0\right)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{3})$．

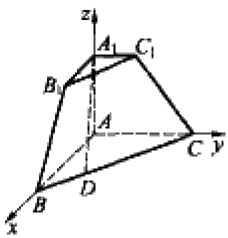


图 8.32

证一 设平面 A_1AD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AD_1}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AA_1}$，得 $\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{3}x_1+\frac{2}{3}y_1=0\\ \sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=\sqrt{2}$，得 $y_1=-2$，$z_1=0$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{2},-2,0)$．又 $\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，由 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{CB}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{CC_1}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_2-2y_2=0\\ -y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，令 $z_2=\sqrt{3}$，得 $y_2=3$，$x_2=3\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(3\sqrt{2},3,\sqrt{3})$．因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，所以平面 $A_1AD\perp$ 平面 BCC_1B_1．

证二 因为 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，所以 $BC\perp AA_1$，$BC\perp AD$，又 $A_1A\cap AD=A$，所以 $BC\perp$ 平面 A_1AD，又 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以平面 $A_1AD\perp$ 平面 BCC_1B_1．

证三 同证一得平面 A_1AD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{2},-2,0)$ 又 $\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},-2,0)$．设 $\boldsymbol{n}_1=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CC_1}=(\sqrt{2}x,-2x-y,\sqrt{3}y)$，所以 $\begin{cases}\sqrt{2}=\sqrt{2}x\\ -2=-2x-y\\ 0=\sqrt{3}y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{CB}$，则 $\boldsymbol{n}_1\parallel$ 平面 BCC_1B_1，故平面 $A_1AD\perp$ 平面 BCC_1B_1．

四、走进考场 16

1．[2008·全国卷Ⅱ理三(19)、文三(20)]如图 8.33，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB=4$，点 E 在 CC_1 上且 $C_1E=3EC$．

(1)证明：$A_1C\perp$ 平面 BED；

(2)求二面角 A_1-DE-B 的大小．

2．[2008·湖南理三(17)、文三(18)]如图 8.34，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle BCD=60°$，E 是 CD 的中点，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=2$．[文科：$PA=\sqrt{3}$]．

(1)证明：平面 $PBE\perp$ 平面 PAB；

[理科](2)求平面 PAD 和平面 PBE 所成二面角(锐角)的大小；

[文科](3)求二面角 $A-BE-P$ 的大小．

3．[2007·全国卷Ⅱ理三(19)、文三(20)]如图 8.35，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $SD\perp$ 底面 $ABCD$，E，F 分别为 AB，SC 的中点．

(1)证明：$EF\parallel$ 平面 SAD；

(2)设 $SD=2DC$，求二面角 $A-EF-D$ 的大小．

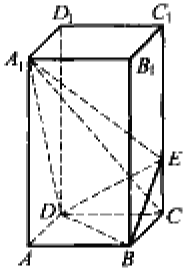


图 8.33

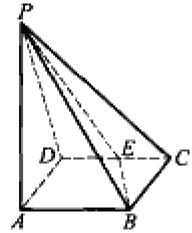


图 8.34

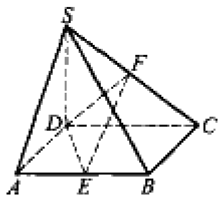


图 8.35

4.[2007·江苏文、理三(18)]如图 8.36,已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 3 的正方体,点 E 在 AA_1 上,点 F 在 CC_1,且 $AE=FC_1=1$.

(1)求证:E,B,F,D 四点共面;

(2)若点 G 在 BC 上,$BG=\dfrac{2}{3}$,点 M 在 BB_1 上,$GM\perp BF$,垂足为点 H,求证:$EM\perp$平面 BCC_1B_1;

(3)用 θ 表示截面 $EBFD_1$ 侧面 BCC_1B_1 所成的锐二面角的大小,求 $\tan\theta$.

5.[2007·浙江理三(19)、文三(20)]在如图 8.37 所示的几何体中,$EA\perp$平面 ABC,$DB\perp$平面 ABC,$AC\perp BC$,且 $AC=BC=BD=2AE$,M 是 AB 的中点.

(1)求证:$CM\perp EM$;

[理科](2)求 CM 与平面 CDE 所成的角;

[文科](3)求 DE 与平面 EMC 所成的角的正切值.

6.[2007·江西文、理三(20)]图 8.38 是一个直三棱柱(以 $A_1B_1C_1$ 为底面)被一平面所截得到的几何体,截面为 ABC,已知 $A_1B_1=B_1C_1=1$,$\angle A_1B_1C_1=90°$,$AA_1=4$,$BB_1=2$,$CC_1=3$.

(1)设点 O 是 AB 的中点,证明:$OC\,/\!/$平面 $A_1B_1C_1$;

[理科](2)求二面角 $B-AC-A_1$ 的大小;

[文科](2)求 AB 与平面 AA_1C_1C 所成角的大小;

(3)求此几何体的体积.

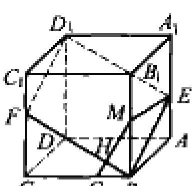


图 8.36

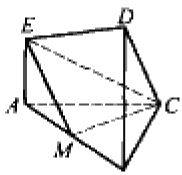


图 8.37

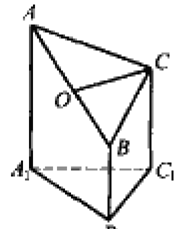


图 8.38

7.[2007·安徽文、理三(17)]如图8.39,在六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,四边形 $ABCD$ 是边长为2的正方形,四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是边长为1的正方形,$DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,$DD_1\perp$ 平面 $ABCD$,$DD_1=2$.

(1)求证:A_1C_1 与 AC 共面,B_1D_1 与 BD 共面;

(2)求证:平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 B_1BDD_1;

(3)求二面角 $A-BB_1-C$ 的大小(用反三角函数值表示).

8.[2007·陕西文、理三(19)]如图8.40,在底面为直角梯形的四棱锥 $P-ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$\angle ABC=90°$,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,$PA=4$,[文科:$PA=3$] $AD=2$,$AB=2\sqrt{3}$,$BC=6$.

(1)求证:$BD\perp$ 平面 PAC;

[理科](2)求二面角 $A-PC-D$ 的大小.

[文科](2)求二面角 $P-BD-A$ 的大小.

9.[2007·湖南文三(18)]如图8.41,已知直二面角 $\alpha-PQ-\beta$,$A\in PQ$,$B\in\alpha$,$C\in\beta$,$CA=CB$,$\angle BAP=45°$,直线 CA 和平面 α 所成的角为30°.

(1)证明:$BC\perp PQ$;

(2)求二面角 $B-AC-P$ 的大小.

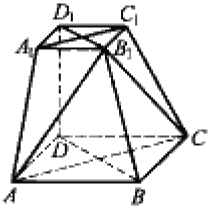


图8.39

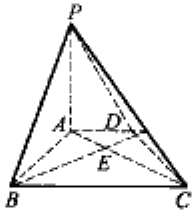


图8.40

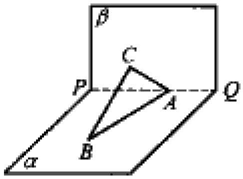


图8.41

10.[2006·北京文三(17)]如图8.42,$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱.

(1)求证:$BD\perp$ 平面 ACC_1A_1;

(2)若二面角 C_1-BD-C 的大小为60°,求异面直线 BC_1 与 AC 所成角的大小.

11.[2006·全国卷Ⅱ理三(19)、文三(20)]如图8.43,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=BC$,D,E 分别为 BB_1,AC_1 的中点.

(1)证明:ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线;

(2)设 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$,求二面角 A_1-AD-C_1 的大小.

12.[2006·安徽文理三(19)]如图8.44,P 是边长为1的正六边形 $ABCDEF$ 所在平面外一点,$PA=1$,P 在平面 ABC 内的射影为 BF 的中点 O.

(1)证明：$PA\perp BF$；

(2)求面 APB 与面 DPB 所成二面角的大小.

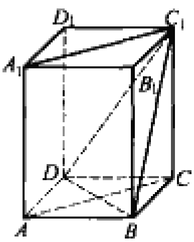


图 8.42

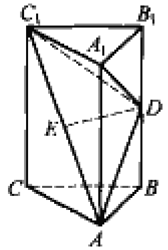


图 8.43

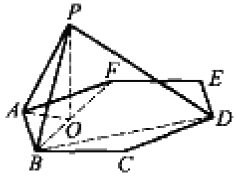


图 8.44

13.［2006·浙江文、理三(17)］如图 8.45，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面为直角梯形，$AD/\!/BC$，$\angle BAD=90°$，$PA\perp$底面 $ABCD$，且 $PA=AD=AB=2BC$，M，N 分别为 PC，PB 的中点.

(1)求证：$PB\perp DM$；

(2)［理科］求 CD 与平面 $ADMN$ 所成的角；

(2)［文科］求 BD 与平面 $ADMN$ 所成的角.

14.［2005·全国卷二文理三(20)］如图 8.46，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$底面 $ABCD$，$AD=PD$，E，F 分别为 CD，PB 的中点.

(1)求证：$EF\perp$平面 PAB；

(2)设 $AB=\sqrt{2}BC$，求 AC 与平面 AEF 所成角的大小.

15.［2005·北京理三(16)］如图 8.47，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=2$，$DC=2\sqrt{3}$，$AA_1=\sqrt{3}$，$AD\perp DC$，$AC\perp BD$，垂足为点 E.

(1)求证：$BD\perp A_1C$；

(2)求二面角 A_1-BD-C_1 的大小；

(3)求异面直线 AD 与 BC_1 所成角的大小.

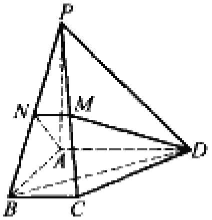


图 8.45

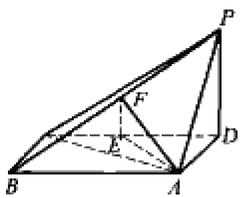


图 8.46

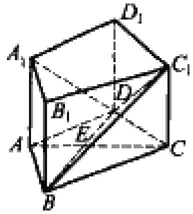


图 8.47

16.［2005·北京文三(16)］如图 8.48，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，$AA_1=4$，点 D 是 AB 的中点.

(1)求证：$AC\perp BC_1$；

(2)求证：AC_1//平面 CDB_1；

(3)求异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值.

17.[2005·全国卷一文理三(18)]如图 8.49，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，AB//DC，$\angle DAB=90°$，$PA\perp$底面 $ABCD$，且 $PA=AD=DC=\frac{1}{2}AB=1$. M 是 PB 的中点.

(1)证明：面 $PAD\perp$面 PCD；

(2)求 AC 与 PB 所成的角；

(3)求 AMC 与 BMC 所成二面角的大小.

18.[2004·全国卷四理三(20)]如图 8.50，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$AB=8$，$AD=4\sqrt{3}$，侧面 PAD 为等边三角形，并且与底面所成二面角为 60°.

(1)求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

(2)证明：$PA\perp BD$.

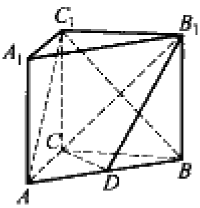


图 8.48

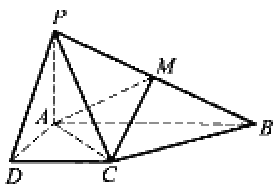


图 8.49

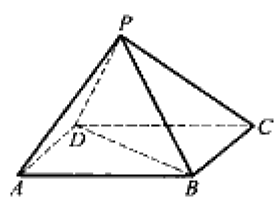


图 8.50

19.[2004·湖北文三(18)]如图 8.51，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AC 与 BD 交于点 E，C_1B 与 CB_1 交于点 F.

(1)求证：$A_1C\perp$平面 BDC_1；

(2)求二面角 $B-EF-C$ 的大小(结果用反三角函数值表示).

20.[2004·湖南文三(19)]如图 8.52，在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，$PA=AC=a$，$PB=PD=\sqrt{2}a$，点 E 是 PD 的中点.

(1)证明：$PA\perp$平面 $ABCD$，PB//平面 EAC；

(2)求以 AC 为棱，EAC 与 DAC 为面的二面角 θ 的正切值.

21.[2004·辽宁文理三(17)]如图 8.53，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle DAB=60°$，$PD\perp$平面 $ABCD$，$PD=AD$，E 为 AB 的中点，F 为 PD 的中点.

(1)证明：平面 $PED\perp$平面 PAB.

(2)求二面角 $P-AB-F$ 的平面角的余弦值.

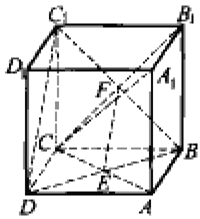


图 8.51

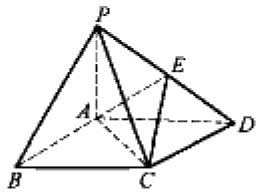


图 8.52

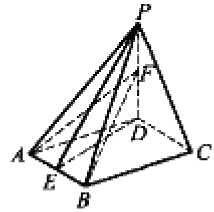


图 8.53

22.[2003·全国,天津理二(16)]如图 8.54 的五个正方体图形中,l 是正方体的一条对角线,点 M,N,P 分别为其所在棱的中点,能得出 $l\perp$ 面 MNP 的图形的序号是________.(写出所有符合要求的图形序号)

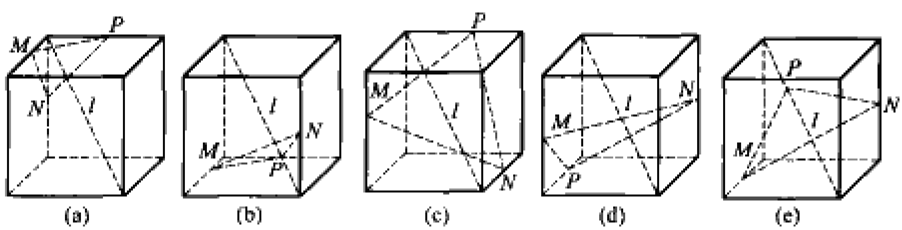


图 8.54

23.[2003·北京春文三(19)]如图 8.55,$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱,侧棱长为 1,底面边长为 2,E 是棱 BC 的中点.

(1)求三棱锥 D_1-DBC 的体积;

(2)证明:BD_1∥平面 C_1DE;

(3)求面 C_1DE 与面 CDE 所成二面角的正切值.

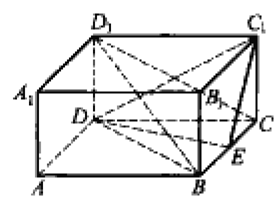


图 8.55

24.[2002·北京春文、理三(19)]如图 8.56,在三棱锥 $S-ABC$ 中,$\angle SAB=\angle SAC=\angle ACB=90°$,$AC=2$,$BC=\sqrt{13}$,$SB=\sqrt{29}$.[文科:$AC=BC=5$,$SB=5\sqrt{5}$].

(1)证明:$SC\perp BC$;

(2)求侧面 SBC 与底面 ABC 所成二面角的大小;

[理科](3)求异面直线 SC 与 AB 所成的角的大小(用反三角函数表示);

[文科](3)求三棱锥的体积 $\triangledown_{S-ABC}$.

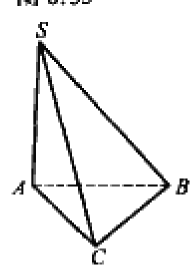


图 8.56

五、答案与提示

1.(2)$\arccos\frac{\sqrt{14}}{42}$　提示：以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DE}=0$.(2)平面 DA_1E 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(4,1,-2)$，$\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1C}>=\frac{\sqrt{14}}{42}$

2.(2)$\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$　提示：以 A 为坐标原点，AB，AP 所在直线分别为 x，z 轴建立空间直角坐标系，$C(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.(1)平面 PAB 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_0=(0,1,0)$而$\overrightarrow{BE}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$与 $\boldsymbol{n}_0$ 共线，$BE\subset$平面 PBE.(2)平面 PBE 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(2,0,1)$，平面 PAD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},-1,0)$

3.(2)$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$　提示：以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，设正方形边长为 a，$DS=b$.(1)$\overrightarrow{EF}=(-a,0,\frac{b}{2})$，平面 SAD 的一个法向量为$\overrightarrow{DC}=(0,a,0)$.$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.(2)求出两半平面的法向量

4.(3)$\sqrt{13}$　提示：以 B 为坐标原点，BA，BC，BB_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}$.(2)设 $M(0,0,z)$.由$\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{BF}=0$得 $z=1$.$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.(3)截面 $EBFD_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-1,-2,3)$，侧面 BCC_1B_1 的一个法向量为$\overrightarrow{BA}=(3,0,0)$.$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{14}}$

5.(2)45°　提示：以 C 为坐标原点，CA，CB 所在直线分别为 x，y 轴建立空间直角坐标系，设 $EA=a$.(1)$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{EM}=0$.(2)平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,-2)$，$\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{CM}>=\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.(2)30°；(3)$\frac{3}{2}$　提示：以 B_1 为坐标原点建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{OC}=(1,-\frac{1}{2},0)$，平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$.$\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}=0$.(2)平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,-1)$.平面 AA_1C_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,0)$.(3)过点 B 作 $BA_2/\!/B_1A_1$ 交 A_1A 于点 A_2，过点 B 作 $BC_2/\!/B_1C_1$ 交 C_1C 于点 C_2.联结 A_2C_2.$\nabla=\nabla_{B-AA_2C_2C}+\nabla_{A_1B_1C_1-A_2BC_2}$

7.(3)$\pi-\arccos\frac{1}{5}$　提示：以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系.

(1)$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)=2\overrightarrow{A_1C_1}$.(2)$\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,所以 $AC\perp$平面 B_1BDD_1.(3)平面 A_1ABB_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(2,0,1)$,平面 B_1BCC_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$. $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{1}{5}$

8.(3) $\arccos\frac{3\sqrt{93}}{31}$ 提示:以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$,$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.(2)平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-\frac{4\sqrt{3}}{3},2,1)$,平面 PAC 的一个法向量为$\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{3},2,0)$

9.(2)$\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ 提示:过点 C 作 $CO\perp PA$ 于点 O,联结 OB,由 $CA=CB$ 得$OA=OB$,所以$\angle OBA=45°$,则$\angle BOA=90°$.以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系$\angle CAO=30°$,设 $OB=OA=a$ (2)求出两半平面的法向量

10.(2)$\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ 提示:以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系,设 $AD=a$,$DD_1=b$.(1)$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0$.(2)求出平面 C_1BD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1$,平面 BDC 的一个法向量为$\overrightarrow{DD_1}$.由$|\cos<\boldsymbol{n}_1,\overrightarrow{DD_1}>|=\cos 60°$,得 $b=\frac{\sqrt{6}}{2}a$

11.(2)60° 提示:取 AC 中点 O,联结 BO,EO,则 $BO\perp AC$,$EO/\!/C_1C$,以 O 为坐标原点,OA,OB,OE 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,设 $AC=2a$,$OB=b$,$BB_1=2c$.(1)$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$,$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$.(2)由 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$ 得 $2a=2c=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$,不妨设 $a=1$,则 $c=1$,$b=1$.平面 A_1AD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,0)$.平面 C_1AD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,1)$

12.(2)$\arccos(-\frac{\sqrt{105}}{35})$ 提示:以 O 为坐标原点,OB,OD,OP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,$OA=\frac{1}{2}$,$OB=OF=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$OD=\frac{3}{2}$,$OP=\frac{\sqrt{3}}{2}$.(1)$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BF}=0$.(2)求出两半平面的法向量

13.(2)(理科)$\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$.(文科)$\frac{\pi}{6}$ 提示:以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴,y 轴.z 轴建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DM}=0$;(2)[理科]$PB\perp$平面 $ADMN$.$<\overrightarrow{CD},\overrightarrow{PB}>$的余角即所求角.[文科]$<\overrightarrow{BD},\overrightarrow{PB}>$的余角即所求角

14.(2)$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$. 提示:以 D 为坐标原点,DC,DA,DP 所在直线分别为

x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{AB}$.(2)平面 AEF 的一个法向量为$(\sqrt{2},1,-1)$

15.(2)90°；(3)$\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. 提示：以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系. B 的坐标为$(3,\sqrt{3},0)$. 证之如下：如图 8.57，由 $AD=2$，$DC=2\sqrt{3}$ $\angle ADC=90°$ 得$\angle CAD=60°$. 由 $AB=AD=2$，$AE\perp BD$ 得$\angle BAE=60°$. 作 $BF\perp x$ 轴，$|AF|=1$，$|BF|=\sqrt{3}$，所以$\angle BAF=60°$. 由 $AB=AD=2$，$AE\perp BE$ 得$\angle BAE=60°$. 作 $BF\perp x$ 轴，$|AF|=1$，$|BF|=\sqrt{3}$，所以$\angle BAF=60°$. 则 $x_B=|DF|=3$，$y_B=|BF|=\sqrt{3}$.(1)$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0$.(2)分别求出平面 A_1BD，C_1BD 的法向量

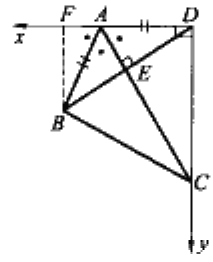


图 8.57

16.(2)$\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. 提示：$\angle ACB=90°$. 以 C 为坐标原点，CA，CB，CC_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$；(2)求出平面 CDB_1 的法向量

17.(2)$\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$；(3)$\pi-\arccos\dfrac{2}{3}$ 提示：以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系.(1)面 PAD 的一个法向量为$\overrightarrow{AB}$，面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0$.(3)分别求出两半平面的法向量

18.(1)96 提示：(1)取 AD 中点 E，作 $PO\perp$平面 $ABCD$，则$\angle PED=60°$，$PO=3\sqrt{3}$.(2)以 O 为坐标原点，x 轴$/\!/AD$，y 轴$/\!/AB$，OP 为 z 轴建立空间直角坐标系，$\overrightarrow{PA}=(2\sqrt{3},-3,-3\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(-4\sqrt{3},-8,0)$

19.(2)$\pi-\arccos\dfrac{1}{3}$ 提示：以点 C 为坐标原点建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{DC_1}$.(2)求出两半平面的法向量

20.(2)$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 提示：(1)$AB=AD=AC=a$，$PA^2+AB^2=PB^2$，所以 $PA\perp AB$. 同理 $PA\perp AD$. 因为$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}$. 或以 A 为坐标原点，AD，AP 分别为 y，z 轴建立空间直角坐标系，$\overrightarrow{PB}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,-\dfrac{a}{2},-a\right)$. 求出平面 EAC 的法向量.(2)求出两半平面的法向量

21.(2)$\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$ 提示：以 D 为坐标原点，DB 所在直线为 x 轴，建立空间直角

坐标系(y 轴$/\!/ AC$)设 $PD=a$.则 $A\left(\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$,$B(a,0,0)$.(1),(2)求出两平面的法向量

22.(1),(4),(5)　提示:建立空间直角坐标系,求出面 MNP 的法向量

23.(1)$\frac{2}{3}$　(3)$\frac{\sqrt{5}}{2}$　提示:以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系;(2)求出平面 C_1DE 的法向量;(3)求出两平面的法向量

24.(2)$60°$　(3)(理科)$\arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$;(文科)$\frac{125\sqrt{3}}{6}$.　提示:以 C 为坐标原点,CB,CA 所在直线分别为 x 轴,y 轴建立空间直角坐标系.(z 轴$/\!/ AD$)(1)$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$;(2)求出两平面的法向量

第二节　向量法求空间各种角

一、高考内容

(一)两异面直线所成的角

已知两条异面直线 a,b,经过空间任一点 O 作直线$a'/\!/ a$,$b'/\!/ b$,我们把 a' 与 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角).

(二)平面的斜线和平面所成的角

*1.三面角的余弦公式

已知 OA,OB 分别是平面 α 的斜线和垂线,A,B 分别是斜足和垂足,则 AB 是斜线在平面 α 的射影.AC 是平面 α 内的任一条直线,设$\angle OAB=\theta_1$,$\angle BAC=\theta_2$,$\angle OAC=\theta$,则有:$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.(要注意分清:$\theta_1$ 是斜线与平面所成角,θ 是平面内直线与斜线所成角,θ_2 是平面内直线与射影所成角).

2.平面的斜线和平面所成的角

平面的斜线和它在平面内的射影所成的角,是这条斜线和这个平面内任一条直线所成的角中最小的角.一个平面的斜线和它在这个平面内的射影的夹角,叫斜线和平面所成的角(或斜线和平面的夹角).如果直线和平面垂直,那么就说直线和平面所成的角是直角,如果直线和平面平行或在平面内,那么说直线和平面所成的角是$0°$的角.

(三)二面角和二面角的平面角

平面内的一条直线把平面分为两部分,其中的每一部分都叫半平面.从一

条直线出发的两个半平面所组成的图形叫二面角，这条直线叫二面角的棱，每个半平面叫二面角的面. 棱为 l、两个面分别为 α,β 的二面角记为 $\alpha-l-\beta$. 一个平面垂直于二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l，且与两个半平面的交线分别是射线 OA,OB，O 为垂足，则 $\angle AOB$ 叫二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角. 二面角的大小可用它的平面角来量度. 二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度. 约定二面角的大小范围是 $0°\sim180°$. 平面角是直角的二面角叫做直二面角.

二、高考要求(理科)

能用向量方法解决直线与直线、直线与平面、平面与平面的夹角的计算问题，了解向量方法在研究立体几何问题中的应用.

三、解法指导

(一)求两异面直线所成角的方法

1. 公式法.

设两异面直线 a 和 b 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，利用求角余弦公式可求得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 由于两向量所成的角 θ 的范围是 $(0,\pi]$，而两异面直线所成的角 α 的范围是 $(0,\frac{\pi}{2}]$，所以

$$\cos\alpha=|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

2. 射影法.

转化为求与其中一直线(a)共线的向量($\boldsymbol{a}$)和该向量在另一直线(b)上的射影($\boldsymbol{b}'$)所在的锐角，即

$$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}'>=\frac{|\boldsymbol{b}'|}{|\boldsymbol{a}|}$$

例 1 [2008·海南理三(18)]已知点 P 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的对角线 BD' 上，$\angle PDA=60°$. 求 DP 与 CC' 所成角的大小.

解 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，如图 8.58，并设正方体棱长为 1，则 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CC'}=(0,0,1)$，联结 $BD,B'D'$. 在平面 $BB'D'D$ 中，延长 DP 交 $B'D'$ 于点 H. 设 $\overrightarrow{DH}=(m,m,1)(m>0)$，由已知 $<\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}>=60°$，由

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DH}=|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{DH}|\cos<\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}>$$

可得

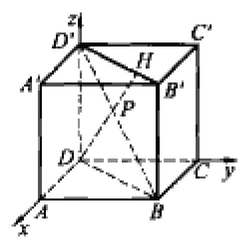


图 8.58

$$m=\sqrt{2m^2+1}\times\frac{1}{2}$$

解得 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\overrightarrow{DH}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

(1)因为

$$\cos<\overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC'}>=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0+1\times 1}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以$<\overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC}>=45°$，即 DP 与 CC' 所成的角为 45°.

例 2　[2008·全国卷Ⅰ理二(16)]如图 8.59，等边△ABC 与正方形 $ABDE$ 有一公共边 AB，二面角 $C-AB-D$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，M,N 分别是 AC,BC 的中点，则 EM,AN 所成角的余弦值等于________.

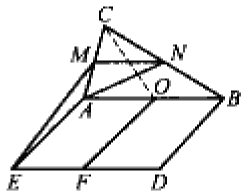


图 8.59

解　设 O 是 AB 中点，F 是 DE 中点，因为△ABC 是等边三角形，$ABDE$ 是正方形，所以 $CO\perp AB$，$FO\perp AB$，则∠COF 是二面角 $C-AB-D$ 的平面角，$\cos\angle COF=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 选取$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{k}$ 为基向量，并设 $AB=2$，则

$$|\boldsymbol{i}|=1,\quad |\boldsymbol{j}|=2,\quad |\boldsymbol{k}|=|\overrightarrow{OC}|=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=2$$

$$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})+\frac{1}{2}(-2\boldsymbol{i})=\frac{1}{2}\boldsymbol{k}-\frac{3}{2}\boldsymbol{i}$$

$$|\overrightarrow{EM}|=\sqrt{(-\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i})^2}=\sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{AN}|=\sqrt{(\frac{1}{2}\boldsymbol{k}-\frac{3}{2}\boldsymbol{i})^2}=\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{AN}=(-\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i})(\frac{1}{2}\boldsymbol{k}-\frac{3}{2}\boldsymbol{i})=\frac{1}{2}$$

所以 $\cos<\overrightarrow{EM},\overrightarrow{AN}>=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{6}$，即 EM,AN 所成角的余弦值等于$\frac{1}{6}$.

例 3　[2002·全国理一(8)、天津理一(7)、文一(8)]如图 8.60，正六棱柱

$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1,侧棱长为 $\sqrt{2}$,则这个棱柱的侧面对角线 E_1D 和 BC_1 所成的角是 (　　)

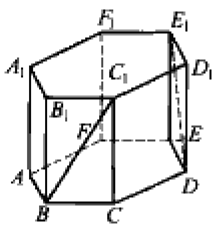


图 8.60

A. 90°　　　　B. 60°

C. 45°　　　　D. 30°

解　设 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{BB_1}=\boldsymbol{c}$. 则

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1,\quad |\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$$

且

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot 1\cos 120°=-\frac{1}{2}$$

而

$$\overrightarrow{BC_1}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{E_1D}=\overrightarrow{E_1D_1}+\overrightarrow{D_1D}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$$

$$|\overrightarrow{E_1D}|=|\overrightarrow{BC_1}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$

所以

$$\cos<\overrightarrow{E_1D_1},\overrightarrow{BC_1}>=\frac{(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\frac{1}{2}-2}{3}=-\frac{1}{2}$$

则 $<\overrightarrow{E_1D},\overrightarrow{BC}>=120°$. 所以异面直线 E_1D 和 BC_1 所成的角为 60°,应选 B.

例 4　如图 8.61,已知空间四边形 $ABCD$, $AB=CD=6$, $BC=DA=8$, $BD=AC=7$,求异面直线 AB 与 CD 所成的角.

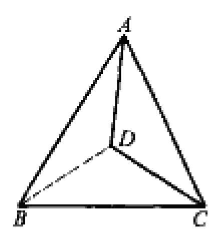


图 8.61

解　因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$,所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$$

而

$$\cos<\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}>=\cos\angle BCD=\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}=\frac{8^2+6^2-7^2}{2\times 8\times 6}$$

$$\cos<\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}>=\cos\angle ACD=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\frac{7^2+6^2-8^2}{2\times 7\times 6}$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=8\times 6\times\frac{8^2+6^2-7^2}{2\times 8\times 6}-7\times 6\times\frac{7^2+6^2-8^2}{2\times 7\times 6}=15$$

$$\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}>=\frac{15}{6\times 6}=\frac{5}{12}$$

所以

$$<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}> = \arccos\frac{5}{12}$$

即异面直线 AB 与 CD 所成的角为 $\arccos\frac{5}{12}$.

例 5 一条线段 AB 夹在一个直二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面 α 和 β 内，它和两个面所成的角都是 $30°$，求这条线段与这个二面角的棱 l 所成的角.

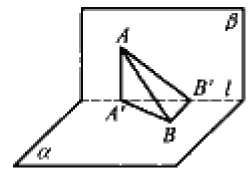


图 8.62

解 如图 8.62，作 $AA'\perp l$ 于点 A'，$BB'\perp l$ 于点 B'，则 $\angle ABA'=\angle BAB'=30°$，且 $A'B'$ 是向量 $\overrightarrow{AB}$ 在棱 l 上的射影.

设 $|\overrightarrow{AB}|=a$，则 $|A'B|=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$|B'B|=\frac{1}{2}a$，所以

$$|A'B'|=\sqrt{|A'B|^2-|BB'|^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

又由 $|A'B'|=|AB|\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}>$，得

$$\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}>=\frac{|A'B'|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}>=45°$，即线段 AB 与棱 l 所成的角为 $45°$.

(二)求直线与平面所成角的方法

1. 先作出这个角，再利用求角余弦公式来求.

2. 改求直线的方向向量与平面的法向量所成的角的余角.

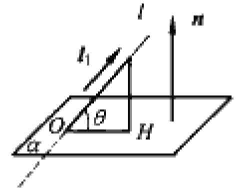


图 8.63

如图 8.63，设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{l}_1$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，直线 l 和平面 α 所成的角为 θ，则 $<\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}>+\theta=\frac{\pi}{2}$，或 $<\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}>-\theta=\frac{\pi}{2}$，因为 θ 的取值范围是 $[0,\frac{\pi}{2}]$，所以

$$\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{l}||\boldsymbol{n}|}$$

3. 改求直线的方向向量与其在平面内的射影所对应的向量所成的角，即 $\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{l},\overrightarrow{OH}>|$.（如例 11）

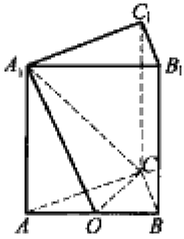


图 8.64

例 6 [2003·上海春文理三(19)]如图 8.64，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，在某个空间直角坐标系中，$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{m}{2},-\frac{\sqrt{3}m}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AC}=(m,0,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,n)$，其中 $m_1n>0$.

(1)证明:三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱;

(2)若 $m=\sqrt{2}n$,求直线 CA_1 与平面 A_1ABB_1 所成角的大小.

(1)证明 因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\left(\frac{m}{2},\frac{\sqrt{3}m}{2},0\right)$,所以 $\overrightarrow{BC}=m$. 因为 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{m}{2},-\frac{\sqrt{3}m}{2},0\right)$,$\overrightarrow{AC}=(m,0,0)$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=m$,$|\overrightarrow{AC}|=m$,则△ABC 为正三角形. 因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$,所以 $AA_1\perp AB$,同理 $AA_1\perp AC$,且 $AB\cap AC=A$,所以 $AA_1\perp$平面 ABC,从而三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱.

(2)解 取 AB 中点 O,联结 CO,A_1O. 因为 $CO\perp AB$,平面 $ABC\perp$平面 ABB_1A_1,所以 $CO\perp$平面 ABB_1A_1,即$\angle CA_1O$ 为直线 CA_1 与平面 A_1ABB_1 所成的角. 又

$$\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AO}=(0,0,-n)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}n,-\frac{\sqrt{6}}{2}n,0\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}n,-\frac{\sqrt{6}}{4}n,-n\right)$$

$$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC}=(0,0,-n)+(\sqrt{2}n,0,0)=(\sqrt{2}n,0,-n)$$

所以

$$\cos\angle CA_1O=\frac{\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{A_1O}||\overrightarrow{A_1C}|}=\frac{\frac{1}{2}n^2+n^2}{\frac{\sqrt{6}}{2}n\cdot\sqrt{3}n}$$

即$\angle CA_1O=45°$,故所求的角为 45°.

例 7 [2006·全国卷Ⅰ理三(19)、文三(20)]如图 8.65,互相垂直的异面直线,MN 是它们的公垂线段,点 A,B 在直线 l_1 上,C 在直线 l_2 上,$AM=MB=MN$.

(1)证明:$AC\perp NB$;

(2)若$\angle ACB=60°$,求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.

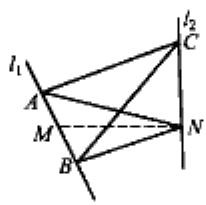


图 8.65

解 以 M 为坐标原点建立空间直角坐标系,如图 8.66,z 轴//直线 l_2,设 $MN=a$,则 $A(-a,0,0)$,$B(a,0,0)$,$N(0,a,0)$.

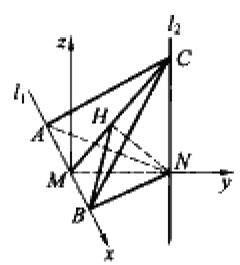


图 8.66

(1)证明略.

(2)解一 设 $c(0,a,c)$. 因为$\overrightarrow{AC}=(a,a,c)$,$\overrightarrow{BC}=(-a,a,c)$. 所以$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$. 又已知$\angle ACB=60°$,所以△$ABC$ 为正三角形,则$|AC|=|BC|=|AB|=2a$,在 Rt△CNB 中,因为

$$|NB| = \sqrt{2}a$$

所以

$$|NC| = \sqrt{|BC|^2 - |NB|^2} = \sqrt{2}a$$

则 $c(0, a, \sqrt{2}a)$. $\tan\angle CMN = \sqrt{2}$，联结 MC，作 $NH \perp MC$ 于点 H，设 $H(0, \lambda, z_H)$，因为 $\frac{z_H}{\lambda} = \tan\angle CMN = \sqrt{2}$，所以 $z_H = \sqrt{2}\lambda$，则 $H(0, \lambda, \sqrt{2}\lambda)$，所以 $\overrightarrow{HN} = (0, a-\lambda, -\sqrt{2}\lambda)$，$\overrightarrow{MC} = (0, a, \sqrt{2}a)$. 因为 $\overrightarrow{HN}\cdot\overrightarrow{MC} = a(a-\lambda) - \sqrt{2}\lambda\cdot\sqrt{2}a = 0$，所以 $\lambda = \frac{1}{3}a$，所以 $H\left(0, \frac{a}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}a\right)$，$\overrightarrow{HN} = \left(0, \frac{2}{3}a, -\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)$. 联结 BH，则 $\overrightarrow{BH} = \left(-a, \frac{a}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}a\right)$. 因为 $\overrightarrow{HN}\cdot\overrightarrow{BH} = \frac{2}{9}a^2 - \frac{2}{9}a^2 = 0$，所以 $\overrightarrow{HN} \perp \overrightarrow{BH}$，又因为 $MC \cap BH = H$，所以 $HN \perp$ 平面 ABC，则 $\angle NBH$ 为 NB 与平面 ABC 所成的角，又 $\overrightarrow{BN} = (-a, a, 0)$. 所以

$$\cos\angle NBH = \frac{\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{BH}||\overrightarrow{BN}|} = \frac{a^2 + \frac{1}{3}a^2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a\cdot\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

即 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解二　选取 $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NC}$ 为基向量，并设 $\overrightarrow{MB} = \boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{NC} = \boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0$，因为 $|AM| = |MB| = |MN|$，所以 $\triangle ABN$ 为直角三角形，又 $MN \perp l_1$，所以 $\triangle ABN$ 为等腰直角三角形，所以 $|BN| = |AN|$，又因为 $l_1 \perp l_2$，所以 $l_1 \perp$ 平面 CMN，则 $l_1 \perp CM$，所以 $|AC| = |CB|$. 又 $\angle ACB = 60°$，所以 $\triangle ABC$ 为正三角形. 若设 $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = 1$，则 $|AC| = 2$，$|MC| = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2 = \sqrt{3}$，故 $|NC| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1} = \sqrt{2}$，即有 $|\boldsymbol{k}| = \sqrt{2}$. 设平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，而

$$\overrightarrow{BC} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \overrightarrow{AB} = 2\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\cdot(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = -x\boldsymbol{i}^2 + y\boldsymbol{j}^2 + z\boldsymbol{k}^2 = -x + y + 2z = 0$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\cdot 2\boldsymbol{i} = 2x\boldsymbol{i}^2 = 0$$

故 $x = 0$，令 $y = 2$，得 $z = -1$，所以 $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{NB} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$. 所以

$$\sin\theta = |\cos<\boldsymbol{n}, \overrightarrow{NB}>| = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NB}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{NB}|} = \frac{|(2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})|}{\sqrt{4\boldsymbol{j}^2 + \boldsymbol{k}^2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{i}^2 + \boldsymbol{j}^2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

则 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$，即 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

例 8 [2008·广东理三(20)]四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是半径为 R 的圆的内接四边形,其中 BD 是圆的直径,$\angle ABD=60°$,$\angle BDC=45°$,$PD\perp$底面 $ABCD$,$PD=2\sqrt{2}R$,E,F 分别是 PB,CD 上的点,且$\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{DF}{FC}$,过点 E 作 BC 的平行线交 PC 于点 G.求 BD 与平面 ABP 所成角 θ 的正弦值.

解 因为 BD 是圆的直径,所以$\angle BAD=90°$,以 A 为坐标原点,建立空间直角坐标系,如图 8.67 所示.因为 $PD\perp$底面 $ABCD$,所以 $PD/\!/z$ 轴,因为$\angle ABD=60°$,所以

$$AB=\frac{1}{2}\cdot 2R=R,AD=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2R=\sqrt{3}R$$

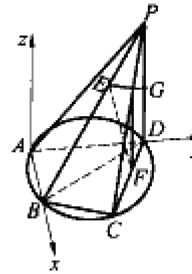


图 8.67

则 $B(R,0,0)$,$D(0,\sqrt{3}R,0)$,$P(0,\sqrt{3}R,2\sqrt{2}R)$.

设$\triangle ABP$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AP}$得 $\begin{cases}xR=0\\\sqrt{3}Ry+2\sqrt{2}Rz=0\end{cases}$.设 $y=2\sqrt{2}$,得 $x=0$,$z=\sqrt{3}$.所以 $\boldsymbol{n}=(0,2\sqrt{2},\sqrt{3})$,又$\overrightarrow{BD}=(-R,\sqrt{3}R,0)$,所以

$$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{6}R}{2R\cdot 11}=\frac{\sqrt{66}}{11}$$

即 BD 与平面 ABP 所成角 θ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{66}}{11}$.

例 9 [2007·湖南理三(18)]如图 8.68(a),E,F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB,CD 的中点,G 是 EF 上的一点,将$\triangle GAB$,$\triangle GCD$ 分别沿 AB,CD 翻折成$\triangle G_1AB$,$\triangle G_2CD$,并联结 G,G_2,使得平面 $G_1AB\perp$平面 $ABCD$,$G_1G_2/\!/AD$,且 $G_1G_2<AD$.联结 BG_2,如图 8.68(b).

(1)证明:平面 $G_1AB\perp$平面 G_1ADG_2;

(2)当 $AB=12$,$BC=25$,$EG=8$ 时,求直线 BG_2 和平面 G_1ADG_2 所成的角.

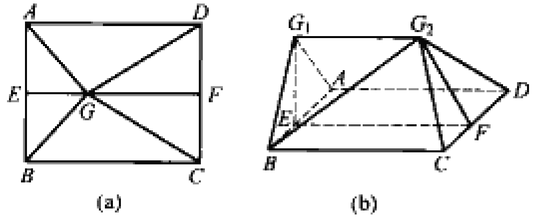


图 8.68

证明 (1)证明略.

(2)由(1)可知，$G_1E\perp$平面 $ABCD$，故可以 E 为坐标原点建立空间直角坐标系，如图 8.69. 因为 $AB=12$，$BC=25$，$EG=8$，所以 $EB=6$，$EF=25$，$GG_1=8$. 则 $A(-6,0,0)$，$D(-6,25,0)$，$G_1(0,0,8)$，$B(6,0,0)$. 所以 $\overrightarrow{AD}=(0,25,0)$，$\overrightarrow{AG_1}=(6,0,8)$. 设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 G_1ADG_2 的一个法向量，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AD}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AG_1}$ 得 $\begin{cases}25y=0\\6x+8z=0\end{cases}$，取 $x=4$，得 $y=0$，$z=-3$，所以 $\boldsymbol{n}=(4,0,-3)$. 过点 G_2 作 $G_2O\perp$平面 $ABCD$ 于点 O，因为 $G_2C=G_2D$，所以 $OC=OD$，于是点 O 在 y 轴上，因为 $G_1G_2/\!/AD$，所以 $G_1G_2/\!/EF$，$G_2O=G_1E=8$. 设 $G_2(0,m,8)(0<m<25)$，在 Rt$\triangle G_2OF$ 中，$17^2=8^2+(25-m)^2$，解得 $m=10$，则 $G_2(0,10,8)$，所以 $\overrightarrow{BG_2}=(-6,10,8)$. 设 BG_2 和平面 G_1ADG_2 所成的角是 θ，则

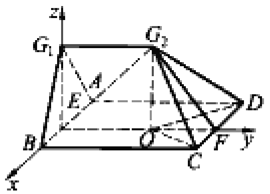


图 8.69

$$\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{BG_2}>|=\frac{|\overrightarrow{BG_2}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BG_2}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-24-24|}{10\sqrt{2}\times5}=\frac{12\sqrt{2}}{25}$$

则直线 BG_2 与平面 G_1ADG_2 所成的角是 $\arcsin\dfrac{12\sqrt{2}}{25}$.

例 10 [2008·全国卷Ⅰ文理一(11)]已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等，A_1 在底面 ABC 内的射影为$\triangle ABC$ 的中心，则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值等于 ( )

A. $\dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\dfrac{2}{3}$

解 如图 8.70，设 O 是 A_1 在底面 ABC 内的射影，选 $\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{AB}$ 作为基向量，$\overrightarrow{OA_1}$ 是平面 ABC 的法向量，则

$$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AB}$$

令 $AB=1$，得

$$AO=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad OA_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

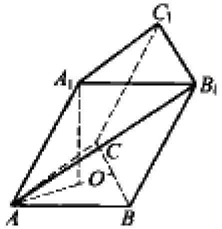


图 8.70

又

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OA_1}=0,\quad \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos30^\circ=\frac{1}{2}$$

易得

$$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_1}^2=\frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{AB_1}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AB})^2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1+2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

所以

$$\sin\theta=\cos<\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{OA_1}>=\frac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{OA_1}|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

应选 B.

例 11 已知直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,底面四边形 $ABCD$ 是一个直角梯形,上底边长 $BC=2$,下底边长 $AD=6$,直角边所在的腰 $AB=2$,$AA_1=4$,E 是 CC_1 的中点,F 分 AD 为 1:2,求直线 EF 和平面 A_1C_1 所成的角 θ.

解 以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系,如图 8.71,则 $C(2,2,0)$,$C_1(2,2,4)$,$D(0,6,0)$,$D_1(0,6,4)$,$F(0,2,0)$,$E(2,2,2)$. 取 $A_1H=\frac{1}{3}A_1D$,$H(0,2,4)$,联结 FH. 因为 $EC_1\perp$ 平面 A_1C_1,$FH\perp$ 平面 A_1C_1,所以 C_1H 是 EF 在平面 A_1C_1 上的射影. 设 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{C_1H}$ 所成角为 θ. 因为 $\overrightarrow{C_1H}=\{-2,0,0\}$,$\overrightarrow{EF}=\{-2,0,-2\}$,所以

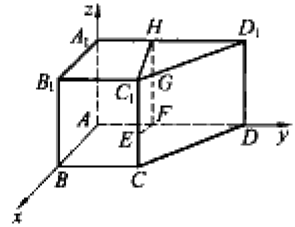


图 8.71

$$\cos\theta_1=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{C_1H}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{C_1H}|}=\frac{4}{2\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad\theta=\frac{\pi}{4}$$

即直线 EF 和平面 A_1C_1 所成的角 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

例 12 [2008·辽宁文理三(19)]在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,$AP=BQ=b(0<b<1)$,截面 $PQEF/\!/A'D$,截面 $PQGH/\!/AD'$.

(1)证明:平面 $PQEF$ 和平面 $PQGH$ 互相垂直;

(2)证明:截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 面积之和是定值,并求出这个值;

[理科](3)若 $D'E$ 与平面 $PQEF$ 所成的角为 45°,求 $D'E$ 与平面 $PQGH$ 所成角的正弦值;

[文科](3)若 $b=\frac{1}{2}$,求 $D'E$ 与平面 $PQEF$ 所成角的正弦值.

证明 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系,如图 8.72,因为截面 $PQEF/\!/A'D$,所以 $PF/\!/A'D$,则 $AF=AP=b$,同理 $A'H=A'P=1-b$,$DH=b$. $DF=1-b$,则 $A(1,0,0)$,$A'(1,0,1)$,$D'(0,0,1)$,$P(1,0,b)$,$Q(1,1,$

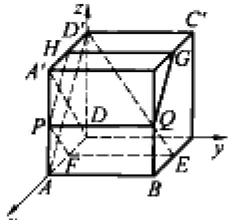


图 8.72

b)，$F(1-b,0,0)$，$E(1-b,1,0)$，$H(b,0,1)$，$G(b,1,1)$.

(1)因为$\overrightarrow{PQ}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{PF}=(-b,0,-b)$，$\overrightarrow{PH}=(b-1,0,1-b)$，$\overrightarrow{AD'}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{A'D}=(-1,0,-1)$. 因为$\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，$\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，所以$\overrightarrow{AD'}$是平面 $PQEF$ 的法向量；因为$\overrightarrow{A'D}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，$\overrightarrow{A'D}\cdot\overrightarrow{PH}=0$，所以$\overrightarrow{A'D}$是平面 $PQGH$ 的法向量. 因为$\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{A'D}=0$，所以$\overrightarrow{A'D}\perp\overrightarrow{AD'}$，则平面 $PQEF$ 和 $PQGH$ 互相垂直.

(2)因为$\overrightarrow{EF}=(0,-1,0)$，所以$\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{PQ}$，$|\overrightarrow{EF}|=|\overrightarrow{PQ}|$，又$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，所以$\overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{PQ}$，则四边形 $PQEF$ 为矩形，同理四边形 $PQGH$ 为矩形. 因为$|\overrightarrow{PH}|=\sqrt{2}(1-b)$，$|\overrightarrow{PF}|=\sqrt{2}b$，所以$|\overrightarrow{PH}|+|\overrightarrow{PF}|=\sqrt{2}$，又$|\overrightarrow{PQ}|=1$，所以截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 的面积之和为$\sqrt{2}$，是定值.

(3)$\overrightarrow{AD'}$是平面 $PQEF$ 的法向量，$D'E$ 与平面 $PQEF$ 所成角为 45°，所以$\overrightarrow{D'E}$与$\overrightarrow{AD'}$成 90° − 45° = 45°角，又$\overrightarrow{D'E}=(1-b,1,-1)$，$\overrightarrow{AD'}=(-1,0,1)$，所以

$$\cos<\overrightarrow{D'E},\overrightarrow{AD'}>=\frac{|\overrightarrow{D'E}\cdot\overrightarrow{AD'}|}{|\overrightarrow{D'E}||\overrightarrow{AD'}|}=\frac{|b-2|}{\sqrt{2}\sqrt{(1-b)^2+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{(1-b)^2+2}=|b-2|$$

解得 $b=\frac{1}{2}$，所以$\overrightarrow{D'E}=(\frac{1}{2},1,-1)$，又$\overrightarrow{A'D}$是平面 $PQGH$ 的法向量，$\overrightarrow{A'D}=(-1,0,-1)$，所以 $D'E$ 与平面 $PQGH$ 所成角的正弦值为

$$|\cos<\overrightarrow{D'E},\overrightarrow{A'D}>|=\frac{|-\frac{1}{2}+1|}{\frac{3}{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

(三)求平面与平面所成角的方法

1. 先作出这个角，再利用求角余弦公式来求.

2. 转化为求两平面的法向量的夹角，公共棱不明显的常用此法来求，但应注意的是法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 的夹角与二面角 θ 的大小是相等或互补的.

3. 转化为求分别在两上半平面内与棱垂直的两条直线所对应的向量的夹角：公共棱明显的都可以用此法来解，用此法不必去判定所求二面角是锐角还是钝角，但应注意两向量的始点应在二面角的棱上.

4. 利用公式.

如图 8.73，设二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 θ，在平面 α 内 $CD\perp l$ 于点 D，在平面 β 内 $AB\perp l$ 于点 B，则向量$\overrightarrow{BA}$与向量$\overrightarrow{DC}$的夹角即为 θ. 特别地，若此时 AB，CD，AC，BD 的长度已知，也可利用公式

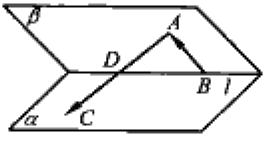


图 8.73

$$|\overrightarrow{AC}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})^2=$$
$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+|\overrightarrow{DC}|^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{DC}|\cos(\pi-\theta)$$

求出 θ 的值

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+|\overrightarrow{DC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{DC}|}$$

注意 法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 的夹角与二面角 θ 的大小是相等还是互补有如下两种判定方法：

(1)结合图形判定二面角是锐二面角还是钝二面角，再确定 θ 的取值.

(2)任取 $A\in\alpha,B\in\beta$，且 $A,B\notin l$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}_1$ 与 $\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}_2$ 同号，则 $\theta=\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$；若异号，则 $\theta=\pi-\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$.（简记为“同等异补”）

例 13 ［2008·全国卷Ⅰ文、理三(18)］如图 8.74(a)，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，底面 $BCDE$ 为矩形，侧面 $ABC\perp$ 底面 $BCDE$，$BC=2$，$CD=\sqrt{2}$，$AB=AC$.

(1)证明：$AD\perp DE$；

(2)设 CE 与平面 ABE 所成的角为 45°，求二面角 $C-AD-E$ 的大小.

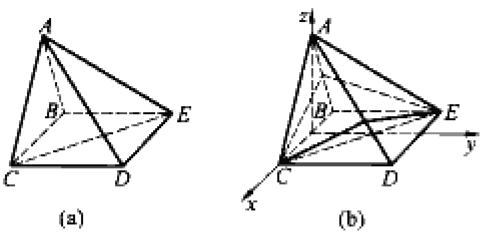


图 8.74

解 (1)作 $OO\perp BC$ 于 O，则 $AO\perp$ 底面 $BCDE$，且 O 为 BC 的中点. 以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.74(b)所示，设 $A(0,0,t)$，则 $C(1,0,0)$，$D(1,\sqrt{2},0)$，$B(-1,0,0)$，$E(-1,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CE}=(-2,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AD}=(1,\sqrt{2},-t)$. 因为 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，所以 $AD\perp CE$.

(2)作 $CF\perp AB$ 于点 F，联结 FE，设 $F(x,0,z)$，则 $\overrightarrow{CF}=(x-1,0,z)$，$\overrightarrow{BE}=(0,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BE}=0$，所以 $CF\perp BE$，又 $AB\cap BE=B$，所以 $CF\perp$ 平面 ABE，则 $\angle CEF$ 是 CE 与平面 ABE 所成的角，即 $\angle CEF=45°$. 由 $CE=\sqrt{6}$ 得 $CF=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{3}$，又 $CB=2$，所以 $\angle FBC=60°$，因此 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $A(0,0,\sqrt{3})$. 作 $CG\perp AD$ 于点 G，联结 GE，在 Rt$\triangle ACD$ 中，$|AD|=\sqrt{6}$，由 $AC^2=AG\cdot AD$ 得 $|AG|=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}=\frac{2}{3}|AD|$，由定比分点公式得 $G(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，所以 $\overrightarrow{GC}=(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$，$\overrightarrow{GE}=(-\frac{5}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$. 又 $\overrightarrow{AD}=(1,\sqrt{2},-\sqrt{3})$，因为 $\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. 所以 $\overrightarrow{GC}$ 与 $\overrightarrow{GE}$ 的夹角等于二面角 $C-AD-$

E 的平面角，由 $\cos<\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GE}>=\frac{\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GC}||\overrightarrow{GE}|}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ 知二面角 $C-AD-E$ 的大小为 $\pi-\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

例 14　[2006·江苏文理三(19)]在正△ABC 中，E,F,P 分别是 AB,AC,BC 边上的点，满足 $AE:EB=CF:FA=CP:PB=1:2$(如图 8.75(a))，将△AEF 沿 EF 折起到△A_1EF 的位置，使二面角 A_1-EF-B 成直二面角，联结 A_1B，A_1P(如图 8.75(b)).

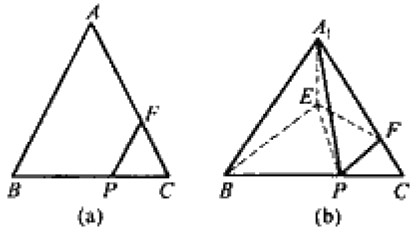


图 8.75

(1)求证：$A_1E\perp$平面 BEP；

(2)求直线 A_1E 与平面 A_1BP 所成角的大小；

(3)求二面角 $B-A_1P-F$ 的大小.(用反三角函数值表示)

解　不妨设正三角形 ABC 的边长为 3. 由(1)$A_1E\perp$平面 BEP，得 $AE\perp EB$，$A_1E\perp EF$，$BE\perp EF$. 以 E 为坐标原点建立空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,1)$，$B(2,0,0)$，$F(0,\sqrt{3},0)$.

(1)证明略.

(2)解法略.　提示：$P(1,\sqrt{3},0)$，平面 A_1BP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\frac{\sqrt{3}}{3},2)$. 直线 A_1E 与平面 A_1BP 所成角为 60°.

(3)**解一**　如图 8.76，过点 F 作 $FM\perp A_1P$ 于点 M，过点 M 作 $MN\perp A_1P$ 交 BP 于点 N，则∠FMN 为二面角 $B-A_1P-F$ 的平面角. 设 $M(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{MF}=(-x,\sqrt{3}-y,-z)$，因为 $\overrightarrow{MF}\perp\overrightarrow{A_1P}$，所以 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0$. 而 $\overrightarrow{A_1P}=(1,\sqrt{3},-1)$. 所以

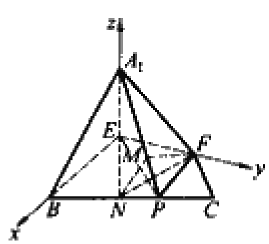


图 8.76

$$x+\sqrt{3}(y-\sqrt{3})-z=0 \qquad ①$$

因为 A_1,M,P 三点共线，所以存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1P}$，因为 $\overrightarrow{A_1M}=(x,y,z-1)$，所以 $(x,y,z-1)=\lambda(1,\sqrt{3},-1)$. 从而 $\begin{cases}x=\lambda\\y=\sqrt{3}\lambda\\z-1=-\lambda\end{cases}$. 将上式代入式①得 $\lambda=\frac{4}{5}$，所以 $M\left(\frac{4}{5},\frac{4\sqrt{3}}{5},\frac{1}{5}\right)$. 同理可得

$N\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，从而$\overrightarrow{MF}=\left(-\frac{4}{5},\frac{\sqrt{3}}{5},-\frac{1}{5}\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{7}{10},-\frac{3\sqrt{3}}{10},-\frac{1}{5}\right)$. 所以

$$\cos<\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MN}>=\frac{\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MF}||\overrightarrow{MN}|}=\frac{-\frac{7}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}}=-\frac{7}{8}$$

则二面角 $B-A_1P-F$ 的大小为 $\pi-\arccos\frac{7}{8}$.

解二　同上得 $B(2,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$P(1,\sqrt{3},0)$，$F(0,\sqrt{3},0)$. 平面 A_1BP 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,\frac{\sqrt{3}}{3},2)$. 设平面 A_1PF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，$\overrightarrow{A_1P}=(1,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{A_1F}=(0,\sqrt{3},-1)$，由 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{A_1P}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{A_1F}$，得$\begin{cases}x+\sqrt{3}y-z=0\\ \sqrt{3}y-z=0\end{cases}$，取 $y=\sqrt{3}$，得 $x=0$，$z=3$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(0,\sqrt{3},3)$.

$$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{7}{\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot2\sqrt{3}}=\frac{7}{8}$$

由图形知二面角 $B-A_1P-F$ 应为钝角，所以其大小为 $\pi-\arccos\frac{7}{8}$.

注意　二面角 θ 与两法向量夹角 $<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>$ 间的关系还可用如下方法判定：$B(2,0,0)\in$ 平面 BA_1P，$F(0,\sqrt{3},0)\in$ 平面 A_1PF，$\overrightarrow{BF}=(-2,\sqrt{3},0)$. 因为 $\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}_1=-1<0$，$\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}_2=3>0$，所以二面角与两法向量夹角间的关系是互补，所以 $\theta=\pi-<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\pi-\arccos\frac{7}{8}$.

例 15　[2004·上海文理三(21)]如图 8.77，$P-ABC$ 是底面边长为 1 的正三棱锥，D，E，F 分别为棱 PA，PB，PC 上的点，截面 DEF // 底面 ABC.

(1)证明：$P-ABC$ 为正四面体；

(2)若 $PD=\frac{1}{2}PA$，求二面角 $D-BC-A$ 的大小(结果用反三角函数值表示).

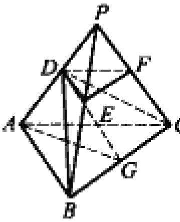


图 8.77

解　(1)证明略.

(2)取 BC 中点 G，联结 AG，DG，因为 $P-ABC$ 为正三棱锥，所以 $AG\perp BC$，$DG\perp BC$，所以$\angle AGD$ 为二面角 $D-BC-A$ 的平面角，取基向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{k}$. 则

$$|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}|=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\frac{1}{2}$$

因为

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$$

$$|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{\frac{1}{4}(\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{j}^2+2\boldsymbol{ij})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\overrightarrow{DG}|=\sqrt{\frac{1}{4}(\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{j}^2+\boldsymbol{k}^2+2\boldsymbol{ij}-2\boldsymbol{ik}-2\boldsymbol{jk})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以

$$\cos<\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GD}>=\frac{\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\right]\cdot\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\right]}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

因此二面角 $D-BC-A$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

例 16　[2008·山东理三(20)]已知四棱锥 $P-ABCD$,底面 $ABCD$ 为菱形,$PA\perp$平面 $ABCD$,$\angle ABC=60°$,E,F 分别是 BC,PC 的中点.

(1)证明:$AE\perp PD$;

(2)若 H 为 PD 上的动点,EH 与平面 PAD 所成最大角的正切值为$\frac{\sqrt{6}}{2}$,求二面角 $E-AF-C$ 的余弦值.

证明　(1)由四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle ABC=60°$,所以$\triangle ABC$ 为正三角形.因为 E 为 BC 的中点,所以 $AE\perp BC$,以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.78 所示.设 $AB=a$,则 $D(0,a,0)$,$E(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$,设 $P(0,0,b)$,则$\overrightarrow{AE}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$,$\overrightarrow{PD}=(0,a,-b)$.因为$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PD}=0$,所以$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{PD}$,即 $AE\perp PD$.

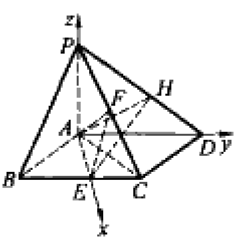


图 8.78

(2)因为 $EA\perp$平面 PAD,所以$\angle EHA$ 为 EH 与平面 PAD 所成的角,$\tan\angle EHA=\frac{EA}{AH}$.当 AH 最短时,$\tan\angle EHA$ 最大,$\angle EHA$ 也最大,此时 $AH\perp$

PD. 由 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{AH}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，得 $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，又 $AD=a$，所以 $\angle ADH=45°$，则 $PA=AD=a$，所以 $P(0,0,a)$. 因为 $C(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},0)$，所以 $F(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{a}{4},\frac{a}{2})$，$\overrightarrow{AF}=(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{a}{4},\frac{a}{2})$，设平面 EAF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AE}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AF}$ 得

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}ax_1=0\\ \frac{\sqrt{3}}{4}ax_1+\frac{a}{4}y_1+\frac{a}{2}z_1=0\end{cases}$$

取 $y=-2$，得 $x_1=0$，$y_1=-2$，$z_1=1$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,-2,1)$. 设平面 AFC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，由 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{AF}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{AC}$，得

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{4}ax_2+\frac{a}{4}y_2+\frac{a}{2}z_2=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}ax_2+\frac{a}{2}y_2=0\end{cases}$$

取 $x_2=-\sqrt{3}$ 得 $y_2=3$，$z_2=0$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(-\sqrt{3},3,0)$，因为

$$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-6}{\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$$

由图形知二面角 $E-AF-C$ 为锐角，所以其大小为 $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$，因此其余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

注意　二面角与两法向量夹角间的关系也可如下判断：$E(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)\in$ 平面 EAF，$C(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},0)\in$ 平面 AFC，$\overrightarrow{EC}=(0,\frac{a}{2},0)$. 因为 $\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}_1<0$，$\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}_2>0$，所以二面角与两法向量夹角互补. 由 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=-\frac{\sqrt{15}}{5}$，知 $<\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2>$ 为钝角，所以二面角为锐二面角.

例 17　[2005·广东文理三(16)]在四面体 $P-ABC$ 中，已知 $PA=BC=6$，$PC=AB=10$，$AC=8$，$PB=2\sqrt{34}$，F 是线段 PB 上一点，$CF=\frac{15}{17}\sqrt{34}$，点 E 在线段 AB 上，且 $EF\perp PB$.

(1)证明：$PB\perp$ 平面 CEF；

(2)求二面角 $B-CE-F$ 的大小.

解　因为 $PA^2+AC^2=36+64=100=PC^2$，所以 $\triangle PAC$ 是以 $\angle PAC$ 为直角的直角三角形，同理，$\triangle PAB$ 是以 $\angle PAB$ 为直角的直角三角形，$\triangle ABC$ 是以 $\angle ACB$ 为直角的直角三角形，所以 $PA\perp$ 平面 ABC，以 A 为坐标原点，AC，AP 分别为 x，z 轴建立空间直角坐标系（y 轴 $/\!/ CB$），如图 8.79，则 $P(0,0,6)$，$B(8,6,0)$，$C(8,0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-8,-6,6)$，设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BP}=(-8\lambda,-6\lambda,6\lambda)$，所以

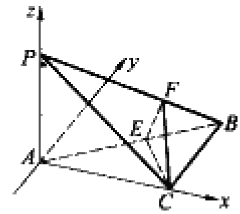


图 8.79

$$F(8(1-\lambda),6(1-\lambda),6\lambda),\quad \overrightarrow{CF}=(-8\lambda,6(1-\lambda),6\lambda)$$

因为 $|\overrightarrow{CF}|=\frac{15}{17}\sqrt{34}$，所以

$$64\lambda^2+36(1-\lambda)^2+36\lambda^2=\frac{225\times 2}{17}$$

$$68\lambda^2-36\lambda+\frac{81}{17}=0,\quad (34\lambda-9)^2=0,\quad \lambda=\frac{9}{34}$$

所以 $\overrightarrow{CF}=(-\frac{36}{17},\frac{75}{17},\frac{27}{17})$.

(1)因为 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CF}=0$，所以 $PB\perp CF$，又 $PB\perp EF$，所以 $PB\perp$ 平面 CEF.

(2)平面 BCE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$. 由(1)平面 CEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{PB}=(8,6,-6)$. $\cos<\boldsymbol{n}_1,\overrightarrow{PB}>=\frac{-6}{1\times 2\sqrt{34}}=-\frac{3\sqrt{34}}{34}$，知图形知二面角 $B-CE-F$ 为锐角，所以其大小为 $\arccos\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

例 18　[2004·北京春文理三(17)]四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形. SD 垂直于底面 $ABCD$，$SB=\sqrt{3}$.

(1)求证：$BC\perp SC$；

(2)求面 ASD 与面 BSC 所成二面角的大小.

(3)[理科]设棱 SA 的中点为 M，求异面直线 DM 与 SB 所成角的大小.

(注：此题与 2001·全国理三(17)、文三(18)，广东文、理三(19)很相似).

解　以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.80 所示.

$$SD^2=SB^2-BD^2=3-2=1$$

所以 $SD=1$，则 $S(0,0,1)$，$A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$M(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$.

(1)(证明略).

(2)设平面 BSC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$. $\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{SC}=(0,$

1,-1),由 $n\perp\overrightarrow{BC}$,$n\perp\overrightarrow{SC}$得$\begin{cases}-x=0\\y-z=0\end{cases}$,取 $y=1$,得 $x=0,z=1$,所以 $n_1=(0,1,1)$. 平面 ASD 的一个法向量为 $n_2=(0,1,0)$. $\cos<n_1,n_2>=\frac{1}{\sqrt{2}\times 1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $<n_1,n_2>=45°$. 因为 $D\in$ 面 ASD,$C\in$ 面 BSC,$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$. $\overrightarrow{DC}\cdot n_1>0$,$\overrightarrow{DC}\cdot n_2>0$,所以面 ASD 与面 BSC 所成二面角与 $<n_1,n_2>$ 相等,即等于 45°.

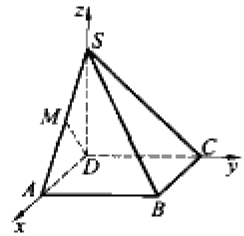


图 8.80

(3)解法略.

例 14 [2004·全国卷一理三(20)]如图 8.81,已知四棱锥 $P-ABCD$,$PB\perp AD$,侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形,底面 $ABCD$ 为菱形,侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 120°.

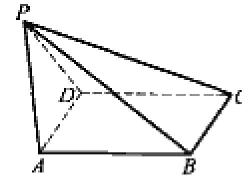


图 8.81

(1)求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离;

(2)求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.

解一 过点 P 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$ 于点 O,联结 OB 交 AD 于点 E. 联结 PE,因为 $PB\perp AD$,所以 $PB\perp BC$,$OB\perp AD$,则 $PE\perp AD$. $\angle PEB$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角,所以 $\angle PEB=120°$,则 $\angle PEO=60°$. 过点 O 作 $OF\parallel AD$. 以 O 为坐标原点,OF 为 x 轴,OB 为 y 轴,OP 为 z 轴建立空间直角坐标系,如图 8.82 所示.

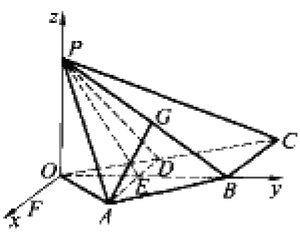


图 8.82

(1)点 P 到平面 $ABCD$ 的距离 $PO=\frac{3}{2}$,解法略.

(2)因为$\triangle PAD$ 为正三角形,所以 $AE=ED=1$,$PE=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$,因为 $AB=AD=2$,所以 $EB=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{3}$,$OE=\frac{1}{2}PE=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$PO=\frac{\sqrt{3}}{2}PE=\frac{3}{2}$,则 $OB=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 所以 $P(0,0,\frac{3}{2})$,$B(0,\frac{3}{2}\sqrt{3},0)$. 过 A 作 $AG\perp PB$ 于 G. 因为 $BC\perp PB$,所以$\overrightarrow{GA}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角就是二面角 $A-PB-C$ 的平面角. 因为 $PA=AD=AB$,所以 G 为 PB 中点. 则 $G(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3},\frac{3}{4})$. 因为 $A(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,$D(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$. $\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$,$BC\underline{\parallel}AD$,所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$,$\overrightarrow{GA}=(1,\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4})$,$|\overrightarrow{BC}|=2$,$|\overrightarrow{GA}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$. 设面 APB 与面 CPB 所成二面角为 θ,则

$$\cos\theta=\cos<\overrightarrow{GA},\overrightarrow{BC}>=\frac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{GA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-2}{2\times\frac{\sqrt{7}}{2}}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

所以 $\theta=\pi-\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

解二　(2)提示:利用法向量,解法略.

例 20　[2006·陕西文、理三(19)]如图 8.83,$\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=l$,$A\in\alpha$,$B\in\beta$,点 A 在直线 l 上的射影为 A_1,点 B 在直线 l 上的射影为 B_1,已知 $AB=2$,$AA_1=1$,$BB_1=\sqrt{2}$.

(1)求直线 AB 分别与平面 α,β 所成角的大小;

(2)二面角 A_1-AB-B_1 的大小.

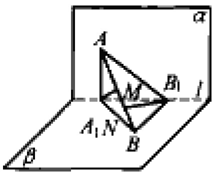


图 8.83

解　(1)$\angle BAB_1=45°$,$\angle ABA_1=30°$,即直线 AB 分别与平面 α,β 所成角为 45°和 30°,解法略.

(2)选取基向量 $\overrightarrow{B_1B}=\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{k}$,则 $|\boldsymbol{i}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{k}|=1$,且 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$,因为 $AB=2$,所以

$$|A_1B_1|^2=|AB_1|^2-|A_1A|^2=|AB|^2-|BB_1|^2-|A_1A|^2=1$$

即 $|\boldsymbol{j}|=1$.作 $A_1M\perp AB$ 于点 M,因为$\angle ABA_1=30°$,$AA_1=1$,所以 $AM=\frac{1}{2}$,则

$$\overrightarrow{MA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{4}(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),\quad \overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{MA}-\boldsymbol{k}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{i}-\frac{1}{4}\boldsymbol{j}-\frac{3}{4}\boldsymbol{k}$$

又因为$\angle BAB=45°$,所以 $AB_1=BB_1$ 取 AB 中点 N,则 $B_1N\perp AB$,所以$\overrightarrow{MA_1}$与$\overrightarrow{NB_1}$所成角的大小即为二面角 A_1-AB-B_1 的大小,而$\overrightarrow{NB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\boldsymbol{i}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$,所以

$$\cos<\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{NB_1}>=\frac{\overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{NB_1}}{|\overrightarrow{MA_1}||\overrightarrow{NB_1}|}=\frac{(-\frac{1}{4}\boldsymbol{i}-\frac{1}{4}\boldsymbol{j}-\frac{3}{4}\boldsymbol{k})\cdot(-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k})}{\sqrt{\frac{1}{16}\boldsymbol{i}^2+\frac{1}{16}\boldsymbol{j}^2+\frac{9}{16}\boldsymbol{k}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\boldsymbol{i}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{j}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{k}^2}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以二面角 A_1-AB-B_1 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解二　作 $A_1M\perp AB$ 于点 M.因为$\angle ABA_130°$,所以$\angle BAA_1=60°$,则$A_1M=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AM=\frac{1}{2}$．作 $B_1N\perp AB_1$，因为 $\angle BAB_1=45°$，所以 $\triangle ABB_1$ 是等腰直角三角形，则 $B_1N=BN=1$．于是

$$MN=2-\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$|A_1B_1|^2=|AB_1|^2-|A_1A|^2=|AB|^2-|BB_1|^2-|A_1A|^2=1$$

所以 $A_1B_1=1$，将 $A_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$MN=\frac{1}{2}$，$NB_1=1$，$B_1A_1=1$ 代入公式得

$$\cos\theta=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+1^2-1^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以二面角 A_1-AB-B_1 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$．

四、走进考场 17

1．[2008·天津文理三(19)]如图 8.84，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，已知 $AB=3$，$AD=2$，$PA=2$，$PD=2\sqrt{2}$，$\angle PAB=60°$．

(1)证明：$AD\perp$ 平面 PAB；

(2)求异面直线 PC 与 AD 所成角的大小；

(3)求二面角 $P-BD-A$ 的大小．

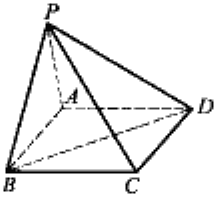


图 8.84

2．[2008·全国卷Ⅱ理一(10)]已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长相等，E 是 SB 的中点，则 AE，SD 所成的角的余弦值为 (　　)

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

3．[2008·上海文理三(16)]如图 8.85，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC_1 的中点，求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小(结果用反三角函数值表示)．

4．[2008·福建文理一(6)]如图 8.86，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，$AA_1=1$，则

[理科] BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为 (　　)

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{5}$

[文科] AC_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的正弦值为 (　　)

A．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{1}{3}$

5.[2007·全国卷Ⅰ文、理一(7)]如图 8.87,正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=2AB$,则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为　　(　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

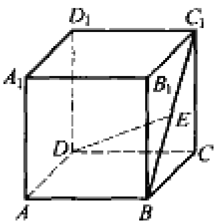


图 8.85

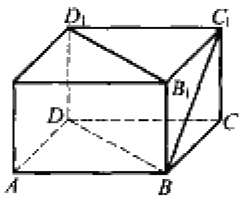


图 8.86

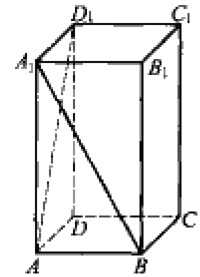


图 8.87

6.[2007·全国卷Ⅱ理一(7)]已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等,则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦值等于　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.[2007·上海理三(6)]如图 8.88,体积为 1 的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=BC=1$,求直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小.(结果用反三角函数值表示)

8.[2007·四川文理二(14)]如图 8.89,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧棱长为$\sqrt{2}$,底面三角形的边长为 1,则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是________.

9.[2007·广东理三(19)]如图 8.90,等腰△ABC 的底边 $AB=6\sqrt{6}$,高 $CD=3$,点 E 是线段 BD 上异于点 B,D 的动点,点 F 在 BC 边上,且 $EF\perp AB$,现沿 EF 将△BEF 折起到△PEF 的位置,使 $PE\perp AE$.记 $BE=x$,$\nabla(x)$表示四棱锥 $P-ACFE$ 的体积.

(1)求$\nabla(x)$的表达式;

(2)当 x 为何值时,$\nabla(x)$取得最大值;(3)当$\nabla(x)$取得最大值时,求异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值.

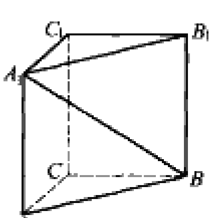


图 8.88

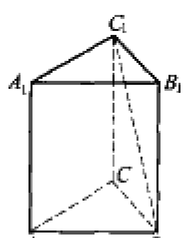


图 8.89

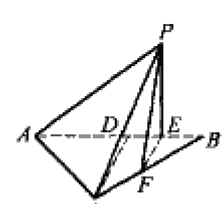


图 8.90

10.[2007·宁夏、海南理三(18)]如图 8.91,在三棱锥 $S-ABC$ 中,侧面 SAB 与侧面 SAC 均为等边三角形,$\angle BAC=90°$,O 为 BC 中点.

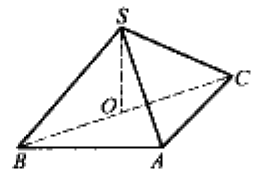


图 8.91

(1)证明:$SO\perp$平面 ABC;

(2)求二面角 $A-SC-B$ 的余弦值.

11.[2007·全国卷Ⅱ文一(7)]已知正三棱锥的侧棱长是底面边长的 2 倍,则侧棱与底面所成角的余弦值等于 ( )

A.$\frac{\sqrt{3}}{6}$ B.$\frac{\sqrt{3}}{4}$ C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$ D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

12.[2007·上海文一(7)]如图 8.92,在直三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle ACB=90°$,$AA_1=2$,$AC=BC=1$,则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的大小是________.(结果用反三角函数值表示)

13.[2007·福建文一(6)]如图 8.93,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F,G,H 分别为 AA_1,AB,BB_1,B_1C_1 的中点,则异面直线 EF 与 GH 所成的角等于 ( )

A.45° B.60° C.90° D.120°

14.[2007·上海春文理三(16)]如图 8.94,在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,E,F 分别是 $A'B'$ 和 AB 的中点,求异面直线 $A'F$ 与 CE 所成角的大小.(结果用反三角函数值表示)

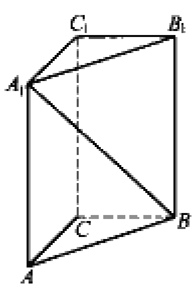


图 8.92

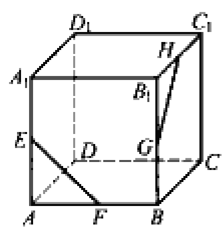


图 8.93

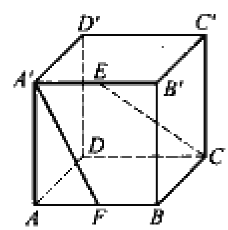


图 8.94

15.[2006·上海理三(19)]如图 8.95,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面是边长为 2 的菱形,$\angle DAB=60°$,对角线 AC 与 BD 相交于点 O,$PO\perp$平面 $ABCD$,PB 与平面 $ABCD$ 所成角为 60°.

(1)求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;

(2)若 E 是 PB 的中点,求异面直线 DE 与 PA 所成角的大小.(结果用反

三角函数值表示）

16.［2006·重庆文三(20)］如图 8.96，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$BB_1=\sqrt{3}+1$，点 E 为 BB_1 上使 $B_1E=1$ 的点，平面 AEC_1 交 DD_1 于点 F，交 A_1D_1 的延长线于点 G.

(1)求异面直线 AD 与 C_1G 所成的角的大小；

(2)求二面角 $A-C_1G-A_1$ 的正切值.

17.［2006·山东理二(15)］如图 8.97，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，D 是 A_1C_1 的中点，则直线 AD 与平面 B_1DC 所成角的正弦值为________.

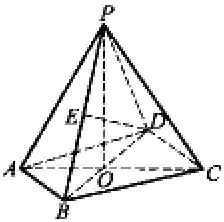


图 8.95

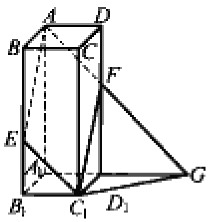


图 8.96

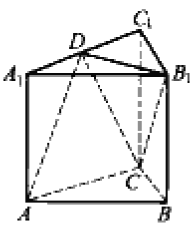


图 8.97

18.［2006·四川理二(13)］在三棱锥 $O-ABC$ 中，三条棱 OA，OB，OC 两两互相垂直，且 $OA=OB=OC$，M 是 AB 边的中点，则 OM 与平面 ABC 所成角的大小是________.（用反三角函数值表示）

19.［2006·广东文理三(17)］如图 8.98，AF，DE 分别是圆 O，圆 O_1 的直径，AD 与两圆所在的平面均垂直，$AD=8$，BC 是圆 O 的直径，$AB=AC=6$，$OE\parallel AD$.

(1)求二面角 $B-AD-F$ 的大小；

(2)求直线 BD 与 EF 所成的角.

20.［2006·上海春文理三(17)］如图 8.99，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $DA=DC=4$，$DD_1=3$，求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小(结果用反三角函数值表示).

21.［2005·福建理一(8)、文一(11)］如图 8.100，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2$，$AD=1$，点 E，F，G 分别是 DD_1，AB，CC_1 的中点，则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是　　（　　）

A. $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

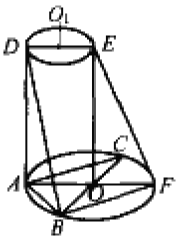


图 8.98

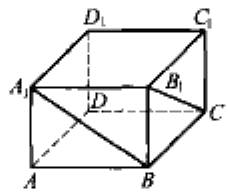


图 8.99

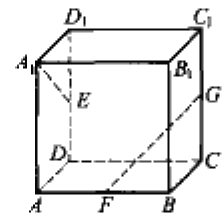


图 8.100

22.[2005·天津理二(12)、文二(13)]如图 8.101,$PA\perp$平面 ABC,$\angle ACB=90°$,且 $PA=AC=BC=a$,则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于________.

23.[2005·上海理三(17)]如图 8.102,已知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=2$,底面 $ABCD$ 是直角梯形,$\angle A$ 为直角,$AB\,/\!/\,CD$,$AB=4$,$AD=2$,$DC=1$,求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小.(结果用反三角函数值表示)

24.[2004·全国卷二文理三(20)]如图 8.103,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=1$,$CB=\sqrt{2}$,侧棱 $AA_1=1$,侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D,B_1C_1 的中点为 M.

(1)求证:$CD\perp$平面 BDM;

(2)求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小.

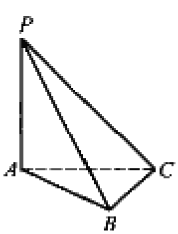


图 8.101

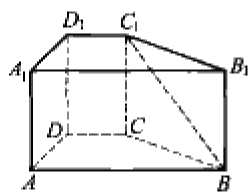


图 8.102

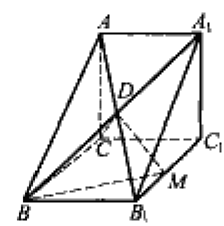


图 8.103

25.[2004·广东文理三(18)]如图 8.104,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 $AB=4$,$AD=3$,$AA_1=2$,E,F 分别是线段 AB,BC 上的点,且 $EB=FB=1$.

(1)求二面角 $C-DE-C_1$ 的正切值;

(2)求直线 EC_1 与 FD_1 所成角的余弦值.

26.[2004·天津文、理三(19)]如图 8.105,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,侧棱 $PD\perp$底面 $ABCD$,$PD=DC$,E 是 PC 的中点.[理科:作

$EF \perp PB$,垂足为点 F].

(1)证明:$PA /\!/$ 平面 EDB;

(2)[理科]证明:$PB \perp$ 平面 EFD;

(2)[文科]求 EB 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值;

(3)[理科]求二面角 $C-PB-D$ 的大小.

27.[2004·浙江文理一(10)]如图 8.106,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,已知 $AB=1$,点 D 在棱 BB_1 上,且 $BD=1$.若 AD 与平面 AA_1C_1C 所成的角为 α,则 α 等于 ( )

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$

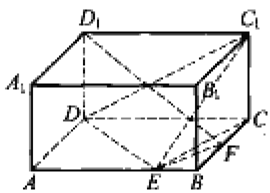


图 8.104

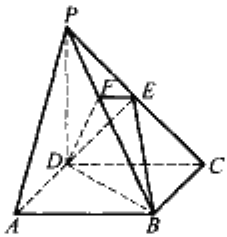


图 8.105

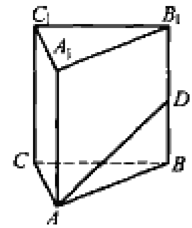


图 8.106

28.[2004·全国卷Ⅲ理三(20)、文三(21)]如图 8.107,在三棱锥 $P-ABC$ 中,侧面 PAC 与底面 ABC 垂直,$PA=PB=PC=3$.

(1)求证:$AB \perp BC$;

(2)[理科]设 $AB=BC=2\sqrt{3}$,求 AC 与平面 PBC 所成角的大小;

(2)[文科]如果 $AB=BC=2\sqrt{3}$,求侧面 PBC 与侧面 PAC 所成二面角的大小.

29.[2004·天津文理一(6)]如图 8.108,在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,O 是底面的 $ABCD$ 的中心,E,F 分别是 CC_1,AD 的中点,那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

30.[2002·上海春文理三(19)]如图 8.109,在三棱柱 $OAB-O_1A_1B_1$ 中,平面 $OBB_1O_1 \perp$ 平面 OAB,$\angle O_1OB=60°$,$\angle AOB=90°$,且 $OB=OO_1=2$,$OA=\sqrt{3}$.

(1)求二面角 O_1-AB-O 的大小;

(2)求异面直线 A_1B 与 AO_1 所成角的大小.(结果用反三角函数值表示)

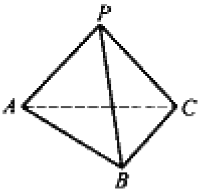


图 8.107

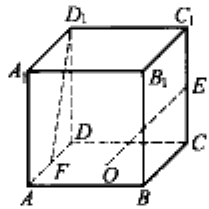


图 8.108

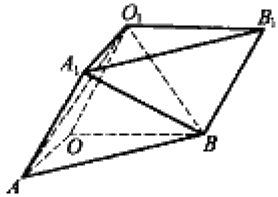


图 8.109

31. [2002·上海文理三(17)]如图 8.110,在直三棱柱 $ABO-A'B'O'$ 中,$OO'=4$,$OA=4$,$OB=3$,$\angle AOB=90°$. D 是线段 $A'B'$ 的中点,P 是侧棱 BB' 上的一点,若 $OP\perp BD$,求 OP 与底面 AOB 所成角的大小.(结果用反三角函数值表示)

32. [2002·天津理三(18)、文三(19)]如图 8.111,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a,侧棱长为 $\sqrt{2}a$.

(1)建立适当的坐标系,并写出 A,B,A_1,C_1 的坐标;

(2)求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

33. [2001·全国理三(17)、文三(18)、广东文、理三(19)]如图 8.112,在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中,$\angle ABC=90°$,$SA\perp$ 面 $ABCD$,$SA=AB=BC=1$,$AD=\frac{1}{2}$.

(1)求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;

(2)求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.

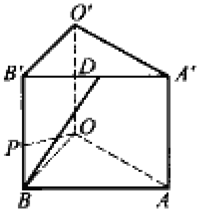


图 8.110

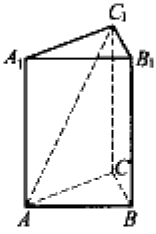


图 8.111

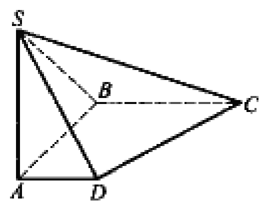


图 8.112

五、答案与提示

1. (2) $\arccos\frac{2\sqrt{11}}{11}$　(3) $\arccos\frac{4\sqrt{55}}{55}$　提示:(1)由 $PA^2+AD^2=PD^2$ 得 $AD\perp PA$　(2)由(1)知平面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$,过点 P 作 $PH\perp AB$ 于点 H,以

H 为坐标原点，HB，HP 分别为 x，z 轴建立空间直角坐标系（y 轴 $/\!/ AD$）．$PH=\sqrt{3}$，$AH=1$，$BH=2$　(3)平面 PBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(\frac{3}{2},\frac{9}{4},\sqrt{3})$．平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$

2. C　提示：以底面正方形的中心为坐标原点建立空间直角坐标系

3. $\arccos\frac{\sqrt{30}}{6}$　提示：以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系

4. D　提示：以 B 为坐标原点建立空间直角坐标系

5. D　提示：以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，设 $AB=1$，$\cos<\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AD_1}>=-\frac{4}{5}$

6. A　提示：以 A 为坐标原点，过点 A 垂直 BC 的直线为 x 轴建立空间直角坐标系

7. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$　提示：由体积为 1 得 $CC_1=2$，以 C 为坐标原点建立空间直角坐标系

8. $\frac{\pi}{6}$　提示：以 C_1 为坐标原点，过 C_1 垂直 A_1B_1 的直线为 x 轴建立空间直角坐标系

9. (1) $\nabla(x)=3\sqrt{6}x-\frac{1}{6\sqrt{6}}x^3(0<x<3\sqrt{6})$；(2)6；(3)$\frac{1}{7}$　提示：(1)因为 $EF\perp AB$，所以 $EF\perp PE$，又因为 $PE\perp AE$，所以 $PE\perp$ 平面 $ACFE$，由 $EF/\!/CD$ 得 $\frac{EF}{CD}=\frac{x}{BD}$，$EF=\frac{x}{\sqrt{6}}$，$S_{ACFE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BEF}=9\sqrt{6}-\frac{1}{2\sqrt{6}}x^2$　(2)令 $\nabla'(x)=0$ 得 $x=6$　(3)以 E 为坐标原点，EA，EF，GP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系

10. (2)$\frac{\sqrt{3}}{3}$　提示：(1)联结 OA，$OA=OB=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}SA$，$AO\perp BC$，$SO\perp BC$，$SO=\frac{\sqrt{2}}{2}SA$，由 $OA^2\neq SO^2=SA^2$ 得 $\triangle SOA$ 为 Rt$\triangle$　(2)以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系，求出两半平面的法向量

11. A

12. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$

13. B

14. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$

15.(1)2　(2)arccos $\frac{\sqrt{2}}{4}$　提示:(1)$\angle PBO=60^\circ$. $PO=BO\tan 60^\circ=\sqrt{3}$. (2)以$O$为坐标原点,$OB$,$OC$,$OP$所在直线分别为$x$轴,$y$轴,$z$轴建立空间直角坐标系. $\overrightarrow{DE}=(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$,$\overrightarrow{PA}=(0,-\sqrt{3},-\sqrt{3})$

16.(1)$\frac{\pi}{6}$　(2)2　提示:以A_1为原点建立空间直角坐标系,$EC_1/\!/AF$.设$G(0,y,0)$,由$\overrightarrow{EC_1}/\!/\overrightarrow{AC}$得$y=\sqrt{3}+1$,$\overrightarrow{C_1G}=(-1,\sqrt{3},0)$.(2)分别求出两半平面的法向量

17.$\frac{4}{5}$　提示:取AB中点E,以C为坐标原点,CE,CC_1所在直线分别为x轴,z轴,y轴$/\!/AB$建立空间直角坐标系.求出平面B_1DC的一个法向量

18.arctan$\sqrt{2}$　提示:以O为坐标原点,OA,OB,OC所在直线分别为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系.求出平面ABC的一个法向量

19.(1)45°　(2)arccos $\frac{\sqrt{82}}{10}$　提示:以A为坐标原点,AB,AC,AD所在直线分别为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系,(1)求出两半平面的法向量

20.arccos $\frac{9}{25}$

21.D

22.arccos $\frac{\sqrt{3}}{3}$　提示:以A为坐标原点,AC,AP所在直线分别为y轴,z轴建立空间直角坐标系(x轴$/\!/BC$)

23.arccos $\frac{3\sqrt{17}}{17}$　提示:以D为坐标原点建立空间直角坐标系

24.(2)$\pi-$ arccos $\frac{\sqrt{3}}{3}$　提示:以C为坐标原点建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DM}=0$;(2)求出两平面的法向量

25.(1)$\frac{\sqrt{2}}{2}$.(2)$\frac{\sqrt{21}}{14}$　提示:以A为坐标原点建立空间直角坐标系.(1)平面C_1DE的一个法向量为$(-1,-1,2)$

26.(2)[文科]$\frac{\sqrt{5}}{5}$.(3)$\frac{\pi}{3}$　提示:以D为坐标原点建立空间直角坐标系,设$DC=a$.　(1)求出平面EDB的法向量;(2)[文科]$\sin\theta=\cos<\overrightarrow{EB},\overrightarrow{PD}>=\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{EB}||\overrightarrow{PD}|}$.[理科]$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$;(3)求出两半平面的法向量

27.D　提示:取BC中点O,以O为坐标原点,OA,OB所在直线分别为x

轴，y 轴建立空间直角坐标系，求出平面 AA_1C_1C 的法向量

28.(2)30° 提示：(1)过点 P 作 $PD\perp AC$ 于点 D．联结 BD，由 $PA=PB=PC$，得 $DA=DC=DB$，所以 $\angle ABC=90°$．(2)以 D 为坐标原点，DB,DC,DP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，求出平面 PBC 的一个法向量

29.B

30.(1)$\arctan\sqrt{7}$　(2)$\arccos\frac{1}{7}$　提示：以 O 为坐标原点，OA,OB 所在直线分别为 x 轴，y 轴建立空间直角坐标系．$O_1(0,1,\sqrt{3})$，$A_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$．(1)求出平面 O_1AB 的法向量

31.$\arctan\frac{3}{8}$　提示：以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系．设 $P(3,0,z)$，由 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ 得 $z=\frac{9}{8}$．$\sin\theta=\cos<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OO'}>$

32.(1)以点 A 为坐标原点，AB,AA_1 所在直线分别为 y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(0,a,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2}a)$，$C_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$
(2)30°　提示：侧面 ABB_1A_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，$\sin\theta=\cos<\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}>$

33.(1)$\frac{1}{4}$　(2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　提示：(2)以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系，平面 SCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(-2,1,-1)$，平面 SBA 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$．$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=-\frac{\sqrt{6}}{3}$．因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}_1<0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}_2>0$，所以二面角与 $<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>$ 互补，则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

第三节　向量法求空间各种距离

一、高考内容

(一)点到平面的距离

一点到它在一个平面内的正射影的距离叫这一点到这个平面的距离．

(二)直线到与它平行平面的距离

一条直线上的任一点到与它平行的平面的距离，叫这条直线到平面的距离．

(三)两个平行平面的距离

与两个平行平面同时垂直的直线，叫这两个平面的公垂线. 公垂线夹在平行平面的部分，叫这两个平面的公垂线段. 两个平行平面的公垂线段的长度，叫两个平行平面的距离.

***(四)两异面直线的距离**

1. 与两条异面直线都垂直相交的直线叫两条异面直线的公垂线. 任意两条异面直线有且只有一条公垂线. 两条异面直线的公垂线夹在异面直线间的部分，叫这两条异面直线的公垂线段. 两条异面直线的公垂线段长是分别联结两条异面直线上两点的线段中最短的一条. 两条异面直线的公垂线段的长度，叫两条异面直线的距离. 两条异面直线的距离等于其中一条直线到过另一条直线且与这条直线平行的平面的距离.

2. 异面直线公垂线段长公式：a，b 为两异面直线，$E\in a$，$F\in b$，$A'A$ 为异面直线 a，b 的公垂线段. 已知 $A'E=m$，$AF=n$，$EF=l$，$AA'=d$，两异面直线所成的角为 θ，则 $d=\sqrt{l^2-m^2-n^2+2mn\cos\theta}$（当 E，F 在 $A'A$ 同侧时，公式中的“±”号取“+”号，异侧时，取“-”号）.

二、高考要求(理科)

了解向量方法在研究立体几何问题中的应用.

三、解题诀窍

(一)求线段长(或两点间距离)的方法

直接利用向量长公式 $|AB|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}$ 或两点间距离公式

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

其中 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$.

例 1 [2002·全国理三(18)、天津理三(18)、文三(19)] 正方形 $ABCD$，$ABEF$ 的边长都是 1，而且平面 $ABCD$，$ABEF$ 互相垂直，点 M 在 AC 上移动，点 N 在 BF 上移动，若 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{2})$. 求 MN 的长.

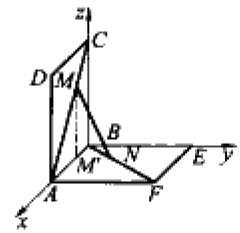


图 8.113

解 以 B 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.113所示. 过 M 作 $MM'\perp x$ 轴于 M'. 因为

$$AM=\sqrt{2}-a$$

原 书 缺 页

$$|\overrightarrow{PQ}|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot e}{|\overrightarrow{PQ}|}\right)^2}=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot e)^2}$$

2.作出距离再求之.可将垂线段对应的向量求出,再求其模,如例5.

例3 [1993·全国理三(26)、文三(27)]已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,过 A_1,B_1,C_1 三点的平面和平面 ABC 的交线为 l.

(1)判定直线 A_1C_1 和 l 的位置关系,并加以证明;

(2)如果 $|AA_1|=1,|AB|=4,|BC|=3,\angle ABC=90°$,求点 A_1 到直线 l 的距离.

解 (1)$l/\!/A_1C_1$,解法略.

(2)取 A 为坐标原点,AB,AA_1 所在直线分别为 x 轴,z 轴,y 轴$/\!/BC$,建立空间直角坐标系如图8.116所示,则 $B(4,0,0)$,$C(4,3,0)$,$A_1(0,0,1)$,$C_1(4,3,1)$,所以 $\overrightarrow{A_1B}=(4,0,-1)$.由(1)$l/\!/A_1C_1$,所以 l 方向上的单位向量

$$e=\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)$$

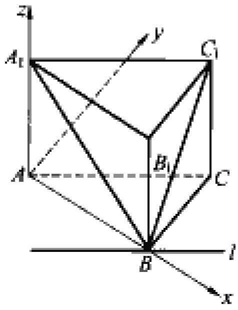


图8.116

则 A_1 到直线 l 的距离

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{A_1B}|^2-(\overrightarrow{A_1B}\cdot e)^2}=\sqrt{17-\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\frac{13}{5}$$

例4 [2002·北京春文理二(15)]正方形 $ABCD$ 的边长是2,E,F 分别是 AB 和 CD 的中点,将正方形沿 EF 折成直二面角(图8.117),M 为矩形 $AEFD$ 内一点,如果$\angle MBE=\angle MBC$,MB 和平面 BCF 所成角的正切值为$\frac{1}{2}$,那么点 M 到直线 EF 的距离为________.

解 建立空间直角坐标系如图8.117所示,则 $E(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(1,2,0)$.作 $MN\perp EF$ 于 N,则 $MN\perp$平面 $BCFE$,联结 BN,则$\angle MBN$ 为 MB 与平面 BCF 所成的角,$\tan\angle MBN=\frac{1}{2}$.设 $M(0,y,z)$,$0<y<2$,$0<z<1$,则 $N(0,y,0)$.因为

$$\overrightarrow{BE}=(-1,0,0),\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$$
$$\overrightarrow{BM}=(-1,y,z),\overrightarrow{BN}=(-1,y,0)$$

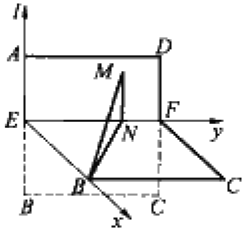


图8.117

所以

$$\cos\angle MBE=\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{BE}|}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2+z^2}},$$

$$\cos\angle MBC=\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{y}{\sqrt{1+y^2+z^2}}$$

$$\tan\angle MBN=\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{BN}|}=\frac{z}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{1}{2}$$

而$\angle MBE=\angle MBC$，所以 $y=1,z=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此，点 M 到直线 EF 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 5　已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=4$，$AD=2$，$AA_1=2$，求 D_1 到直线 AC 的距离.

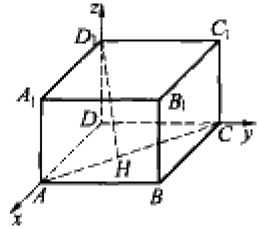


图 8.118

解　(1)以点 D 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.118 所示，则 $A(2,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$C(0,4,0)$. 过 D_1 作 $D_1H\perp AC$ 于 H，$\overrightarrow{AC}=(-2,4,0)$，并设$\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AC}=(-2\lambda,4\lambda,0)$，则 $H(2-2\lambda,4\lambda,0)$，所以$\overrightarrow{D_1H}=(2-2\lambda,4\lambda,-2)$. 因为$\overrightarrow{D_1H}\perp\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{D_1H}\cdot\overrightarrow{AC}=-4+4\lambda+16\lambda=20\lambda-4=0$，则 $\lambda=\frac{1}{5}$，所以$\overrightarrow{D_1H}=\left(\frac{5}{8},\frac{4}{5},-2\right)$，则 $|\overrightarrow{D_1H}|=2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+1}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

(三)求点到平面距离的方法

1. 利用公式求解. 如图 8.119 所示，设 P 为平面 α 外一点，Q 为 α 上任一点，$PO\perp\alpha$ 于点 O，$\boldsymbol{e}$ 为平面 α 法向量方向上的单位向量. 因为$\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{e}=|\overrightarrow{PQ}|\cos<\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{e}>$，所以

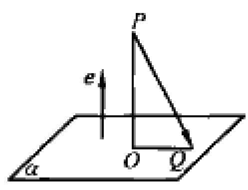


图 8.119

$$|PO|=|PQ|\cos\angle QPO=|\overrightarrow{PQ}||\cos<\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{e}>|=$$
$$||\overrightarrow{PQ}|\cos<\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{e}>|=|\cos<\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{e}>|$$

可见，点到平面的距离等于这点与平面上任一点所联结的向量与该平面法向量方向上的单位向量数量积的绝对值.

2. 用待定系数法求出垂足的坐标，再用两点间距离公式来求.

注意　遇到求锥体体积问题，也可用向量法先求出顶点到底面的距离.

例 6　[2007·辽宁文、理三(18)]如图 8.120，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=a$，D，E 分别为棱 AB，BC 的中点，M 为棱 AA_1 上的点，二面角 $M-DE-A$ 为 $30°$.

(1)证明：$A_1B_1\perp C_1D$；

(2)求 MA 的长,并求点 C 到平面 MDE 的距离.

证明 以 C 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.120所示,则 $A(a,0,0)$,$B(0,a,0)$,$D(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$,$E(0,\frac{a}{2},0)$.

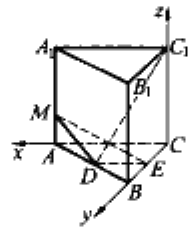


图 8.120

(1)略.

(2)设 $M(a,0,c)$,则$\overrightarrow{DM}=(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},c)$,$\overrightarrow{DE}=(-\frac{a}{2},0,0)$.设平面 MDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,由 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DM}$,$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DE}$ 得

$$\begin{cases}\frac{a}{2}x-\frac{a}{2}y+cz=0\\-\frac{a}{2}x=0\end{cases}$$

,令 $y=2c$,得 $x=0$,$y=2c$,$z=a$,所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,2c,a)$.平面 ADE 的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$,由已知

$$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{a}{\sqrt{4c^2+a^2}}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

解得 $c=\frac{\sqrt{3}}{6}a$,即 MA 的长为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$,则 $\boldsymbol{n}_1=(0,\frac{\sqrt{3}}{3}a,a)$,$\overrightarrow{CE}=(0,\frac{a}{2},0)$,所以点 C 到平面 MDE 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a^2}{\frac{2}{\sqrt{3}}a}=\frac{a}{4}$$

例 7 [2007·江苏文理二(14)]如图 8.121,正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 2,侧棱与底面 ABC 成 45°角,则点 A 到侧面 PBC 的距离为________.

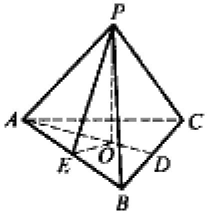


图 8.121

解 过 P 作 $PO\perp$底面 ABC 于点 O,则 O 为正$\triangle ABC$ 的中心,联结 AO 并延长交 BC 于 D,则 D 为 BC 中点,$AD\perp BC$,$\angle PAO$ 为侧棱 PA 与底面 ABC 所成的角,所以 $\angle PAO=45^\circ$,因为 $PO=2$,所以 $AO=2$,$PA=2\sqrt{2}$,取 AB 中点 E,联结 PE,OE,则 $AE=AO\cos 30^\circ=\sqrt{3}$,所以 $AB=2\sqrt{3}\cos\angle PAE=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

解一 取基向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{k}$,则

$$|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=2\sqrt{3},|\boldsymbol{k}|=2\sqrt{2}$$

$$i\cdot j=2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cos 60°=6$$

$$i\cdot k=j\cdot k=2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}=6$$

设平面 PBC 的法向量为

$$n=xi+yj+zk,\overrightarrow{BC}=j-i,\overrightarrow{BP}=k-i$$

由 $n\cdot\overrightarrow{BC}=0,n\cdot\overrightarrow{BP}=0$ 得

$$\begin{cases}-xi^2+xi\cdot j-yi\cdot j+yj^2-zi\cdot k+zi\cdot k=0\\ -xi^2-yi\cdot j-zi\cdot k+xi\cdot k+yj\cdot k+zk^2=0\end{cases}$$

化简得 $\begin{cases}-x+y=0\\ -3x+z=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $y=1,z=3$，所以

$$n=i+j+3k$$

$$|n|=\sqrt{i^2+j^2+9k^2+2i\cdot j+6i\cdot k+6j\cdot k}=6\sqrt{5}$$

则点 A 到侧面 PBC 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot n|}{|n|}=\frac{i^2+i\cdot j+3\lambda k}{6\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

解二　如图 8.122，以 A 为坐标原点，AD 所在直线为 x 轴建立空间直角坐标系（y 轴 // BC，z 轴 // PO），则 $B(3,-\sqrt{3},0)$，$C(3,\sqrt{3},0)$，$P(2,0,2)$. 设平面 PBC 的法向量为 $n=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,\sqrt{3},2)$，由 $n\cdot\overrightarrow{BP}=0$，$n\cdot\overrightarrow{BC}=0$，得 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y+2z=0\\ 2\sqrt{3}y=0\end{cases}$，取 $z=1$，得 $y=0,x=2$，所以 $n=(2,0,1)$，则点 A 到侧面 PBC 的距离

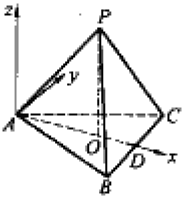


图 8.122

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot n|}{|n|}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6}{5}\sqrt{5}$$

例 8　[2003·全国、天津理三(18)、江苏文理三(19)]在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，侧棱 $AA_1=2$，D，E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点，点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G.

(1)求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小(结果用反三角函数值表示)；

(2)求点 A_1 到平面 AED 的距离.

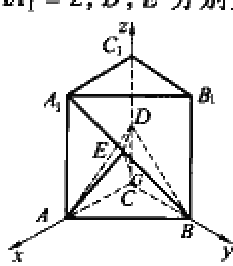


图 8.123

解　以点 C 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.123，设 $CA=2a$，则 $A(2a,0,0)$，$B(0,2a,0)$，$D(0,0,$

1), $A_1(2a,0,2)$, $E(a,a,1)$, $G\left(\frac{2a}{3},\frac{2a}{3},\frac{1}{3}\right)$, 则 $\overrightarrow{EG}=\left(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{BD}=(0,-2a,1)$. 由 $\overrightarrow{EG}\perp\overrightarrow{BD}$ 得 $\frac{2a^2}{3}-\frac{2}{3}=0$, 解得 $a=1$, 所以 $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $A_1(2,0,2)$, $E(1,1,1)$.

(1)联结 BG, 则 $\angle EBG$ 是 A_1B 与平面 ABD 所成角, 其大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(2)**解一** 设 $A_1H\perp$ 平面 AED, 垂足为 H, 并设

$\overrightarrow{A_1H}=x\overrightarrow{A_1A}+y\overrightarrow{A_1E}+z\overrightarrow{A_1D}=(-y-2z,y,-2x-y-z)(x+y+z=1)$

由 $\overrightarrow{A_1H}\perp\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{A_1H}\perp\overrightarrow{DA}$ 得

$$\begin{cases}-y-2z+y=0\\-2y-4z+2x+y+z=0\\x+y+z=1\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\\z=0\end{cases}$, 所以 $\overrightarrow{A_1H}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$, $|\overrightarrow{A_1H}|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$, 则点 A_1 到平面 AED 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

解二 设 $A_1H\perp$ 平面 AED, 垂足为 H, 并设 $H(x,y,z)$, 则 $\overrightarrow{A_1H}=(x-2,y,z-2)$, $\overrightarrow{DH}=(x,y,z-1)$, $\overrightarrow{DE}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{DA}=(2,0,-1)$. 由 $\overrightarrow{A_1H}\perp\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{A_1H}\perp\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{A_1H}\perp\overrightarrow{DA}$ 得

$$\begin{cases}x(x-2)+y^2+(z-1)(z-2)=0 & ①\\x-2+y=0 & ②\\2x-4-z+2=0 & ③\end{cases}$$

由②,③得 $x=\frac{1}{2}z+1$, $y=1-\frac{1}{2}z$, 代入①得

$$3z^2-8z+4=0$$

解得 $\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\y=\frac{2}{3}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=0\\z=2\end{cases}$ (不合, 此时 $\overrightarrow{A_1H}$ 为 $\mathbf{0}$)

所以 $H\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, 则 $\overrightarrow{A_1H}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$, 所以 $|\overrightarrow{A_1H}|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

解三　设平面 AED 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DA}$，$\boldsymbol{n}\perp DE$ 得 $\begin{cases}2x-z=0\\x+y=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=2\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$，又 $\overrightarrow{A_1D}=(2,0,1)$，所以 A_1 到平面 AED 的距离为

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{A_1D}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

例 9　[2007·四川理三(19)] $PCBM$ 是直角梯形，$\angle PCB=90°$，$PM\,/\!/\,BC$，$PM=1$，$BC=2$，又 $AC=1$，$\angle ACB=120°$，$AB\perp PC$，直线 AM 与直线 PC 所成的角为 $60°$.

(1)求证：平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

(2)求二面角 $M-AC-B$ 的大小；

(3)求三棱锥 $P-MAC$ 的体积.

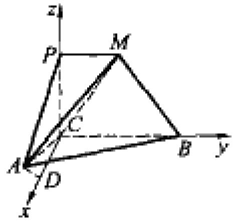


图 8.124

证明　(1)略.

(2)**解一**　在平面 ABC 内，过 C 作 $CD\perp CB$，以 C 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.124 所示，$\angle ACD=120°-90°=30°$，则 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. 设 $P(0,0,z_0)(z_0>0)$，则 $M(0,1,z_0)$，$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},z_0\right)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,z_0)$. 由直线 AM 与直线 PC 所成的角为 $60°$，得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{CP}|\cos 60°$，即 $z_0^2=\frac{1}{2}\sqrt{z_0^2+3}\cdot z_0$，解得 $z_0=1$，所以 $\overrightarrow{CM}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CA}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. 设平面 MAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CM}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CA}$，得 $\begin{cases}y_1+z_1=0\\\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，得 $\begin{cases}x_1=1\\y_1=\sqrt{3}\\z_1=-\sqrt{3}\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$. 平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$. 设 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 所成角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$. 显然，二面角 $M-AC-B$ 的平面角为锐角，所以二面角 $M-AC-B$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(3)平面 PCM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$，所以点 A 到平面 PCM 的距

离 $h=\dfrac{|\overrightarrow{CA}\cdot n_1|}{|n_1|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $|\overrightarrow{PC}|=1$, $|\overrightarrow{PM}|=1$, 所以 $\nabla_{P-MAC}=\nabla_{A-PCM}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{PM}|\cdot h=\dfrac{1}{6}\times 1\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

解二 设 $PC=a$, 把 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CP}$ 作为基底, 依题意有

$$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1\times 2\times\cos 120^\circ=-1$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM}=(-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB})^2=1^2+a^2+1-1\times 2\times(-\frac{1}{2})=a^2+3$$

因为直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60°, 所以

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{CP}|\cos 60^\circ$$

而

$$(-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CP}=a^2$$

所以

$$a^2=|\overrightarrow{AM}|\cdot a\cdot\frac{1}{2}, |AM|=2a$$

即 $\sqrt{a^2+3}=2a$, $a=1$, 所以 $PC=a=1$.

由(1)知 $\overrightarrow{CP}$ 是平面 ABC 的法向量, 设 $n=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}+z\overrightarrow{CP}$ 是平面 ACM 的法向量, 由 $n\perp\overrightarrow{CA}$ 得 $n\cdot\overrightarrow{CA}=0$, 由 $n\perp\overrightarrow{CM}$, 得 $n\cdot\overrightarrow{CM}=0$. 即

$$n\cdot(\overrightarrow{CP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB})=0, (x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}+z\overrightarrow{CP})\cdot(\overrightarrow{CP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB})=0$$

于是 $x-y=0$, $2zx+4y=0$. 取 $x=y=-1$, 得 $z=\dfrac{3}{2}$, 所以

$$n=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CP}$$

$$|n|=(-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CP})^2=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

设 $\overrightarrow{CP}$ 与 n 所成的角为 θ, 则

$$\cos\theta=\frac{n\cdot\overrightarrow{CP}}{|n||\overrightarrow{CP}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

由图形可知二面角 $M-AC-B$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

(3)设 $\boldsymbol{m}=r\overrightarrow{CA}+s\overrightarrow{CB}+t\overrightarrow{CP}$是平面 PCM 的法向量，由 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{PM}$得 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PM}=0$，即 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，由 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{CP}$得 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，于是 $-r+4s=0$，$t=0$. 令 $r=4$，得 $s=1$，$t=0$，于是 $\boldsymbol{m}=4\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$，$|\boldsymbol{m}|=2\sqrt{3}$，则 A 到平面 PCM 的距离

$$d=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以 $$\nabla_{P-MAC}=\nabla_{A-PCM}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times|CP|\times|PM|\times d=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

(四)求两异面直线距离的方法

1. 利用公式求解. 如图 8.125，设 AB，CD 为两异面直线，P 为 AB 上任一点，Q 为 CD 上任一点，$P'Q'$为 AB 与 CD 的公垂线段，$\boldsymbol{e}$ 为 AB，CD 公垂线方向上的单位向量，过 P' 作 $P'Q''$ $\underline{\parallel}$ PQ，联结 QQ''，$Q'Q''$，则 $PP'Q''Q$ 为平行四边形，所以 QQ'' $\underline{\parallel}$ PP'. 因为 $P'Q'\perp AB$，所以 $P'Q'\perp QQ''$. 又 $P'Q'\perp CD$，所以 $P'Q'\perp$平面 $QQ''Q'$，则 $P'Q'\perp Q'Q''$. 因为

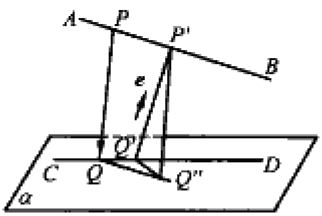


图 8.125

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{e}=|\overrightarrow{PQ}|\cos<\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{e}>$$

所以 $|P'Q'|=|P'Q''|\cos\angle Q'P'Q''=|PQ||\cos<\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{e}>|=||\overrightarrow{PQ}|\cos<\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{e}>|=|\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{e}|$.

可见，两异面直线间的距离等于联结两直线上各任一点所得的向量与两异面直线公垂线方向上的单位向量数量积的绝对值.

2. 根据定义，转化为求两异面直线公垂线段的长，又有两种方法.

(1)作出公垂线段 $P'Q'$，再求出$\overrightarrow{P'Q'}$，从而求得$|P'Q'|$的值.

(2)设出公垂线段.

①设 $P'Q'$是两异面直线 AB 和 CD 的公垂线段，并设$\overrightarrow{AP'}=\lambda_1\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CQ'}=\lambda_2\overrightarrow{CD}$($\lambda_1,\lambda_2$ 为待定常数)，或利用 P'在 AB 上，Q'在 CD 上的条件设出 P'，Q'的坐标.

②求出$\overrightarrow{P'Q}$的表达式(含 λ_1,λ_2).

③由$\overrightarrow{P'Q'}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{CD}$得出两个含 λ_1,λ_2 的方程，解方程组求出 λ_1,λ_2 的值，从而求出$\overrightarrow{P'Q'}$.

④求$|\overrightarrow{P'Q'}|$的值.

说明　第二种方法不如第一种方法简便.

3.转化成线面距离再转化成点面距离.设 CD 在平面 α 内,若 $AB\parallel\alpha$,P 为AB 上任一点,则 P 到平面α 的距离就是两异面直线 AB 与 CD 间的距离.

例 10 [2005·重庆理三(20)]在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB\perp$侧面 BB_1C_1C,E 为棱 CC_1 上异于 C,C_1 的一点,$EA\perp EB_1$,已知 $AB=\sqrt{2}$,$BB_1=2$,$BC=1$,$\angle BCC_1=\frac{\pi}{3}$.求异面直线 AB 与 EB_1 的距离.

解一 以 B 为原点,BB_1,BA 所在直线分别为 y 轴,z 轴建立空间直角坐标系,如图 8.126,由已知得 $A(0,0,\sqrt{2})$,$B_1(0,2,0)$,$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,$C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.设 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},a,0\right)$,则由 $EA\perp EB_1$,得 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0$,即 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-a,\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},2-a,0\right)=a^2-2a+\frac{3}{4}=0$,解

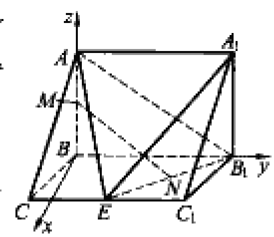


图 8.126

得 $a=\frac{1}{2}$或 $a=\frac{3}{2}$(此时 E 与C_1 重合,所以舍去),则 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$.设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为 AB,EB_1 公垂线方向上的一个向量,由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EB_1}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{2}z=0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0\end{cases}$,取 $x=\sqrt{3}$,得 $y=1$,$z=0$,所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,0)$,$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,所以异面直线 AB 与 EB_1 的距离 $d=|\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{e}|=1$.

解二 设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{BB_1}=\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{k}$,则$|\boldsymbol{i}|=1$,$|\boldsymbol{j}|=2$,$|\boldsymbol{k}|=\sqrt{2}$,且 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0$,$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{j}|\cos 120^\circ=-1$.令$\overrightarrow{EC_1}=\lambda\overrightarrow{CC_1}=\lambda\boldsymbol{j}$,则$\overrightarrow{EB_1}=-\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-\boldsymbol{i}+(\lambda-1)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,因为$\overrightarrow{EB_1}\perp EA$,所以$\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{EA}=(-\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j})\cdot[-\boldsymbol{i}+(\lambda-1)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]=4\lambda^2-2\lambda=0$.因为 E 异于 C,C_1,所以 $\lambda=\frac{1}{2}$,即 E 为CC_1 的中点,所以$\overrightarrow{EB_1}=-\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$.设 AB 与EB_1 公垂线方向上的向量为 $\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+j\boldsymbol{k}$,由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EB_1}$得$\begin{cases}2z=0\\-\frac{3}{2}x+3y=0\end{cases}$,令 $x=2$,得 $y=1$,$z=0$,所以 $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$,则异面直线 AB 与 EB_1 的距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}|}{\sqrt{4\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{j}^2+4\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}}}=1$$

解三 同解二得 $\lambda=\frac{1}{2}$,所以$\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$,而$\overrightarrow{EB_1}=-\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$,因为$\overrightarrow{EB_1}\cdot$

$\overrightarrow{BE}=(-i+\frac{1}{2}j)\cdot(i+\frac{1}{2}j)=-i^2+\frac{1}{4}j^2=0$,所以 $EB_1\perp BE$. 又 $AB\perp BE$,所以 BE 即为 AB 与 EB_1 的公垂线,所以 $|\overrightarrow{EB}|^2=i^2+i\cdot j+\frac{1}{4}j^2=1$.

解四 同解一求得 $E(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$. 设 MN 为 AB 与 EB_1 的公垂线,则由 M 在 AB 上,可设 $M(0,0,m)$,由 N 在 EB_1 上,可设 $\overrightarrow{EN}=\lambda\overrightarrow{EB_1}=\lambda(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)=(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda,0)$,所以 $N(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda,0)$,则 $\overrightarrow{MN}=(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda,-m)$. 由 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN}\perp EB_1$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{2}m=0\\-\frac{3}{4}(1-\lambda)+\frac{3}{4}(1+3\lambda)=0\end{cases}$,解得 $m=0$, $\lambda=0$,所以 $\overrightarrow{MN}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$,则 $|\overrightarrow{MN}|=1$.

解五 同解一求得 $E(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$. 设 MN 为 AB 与 EB_1 的公垂线,设 $M(0,0,m)$,在 xBy 平面上 EB_1 的方程为 $\frac{y-2}{\frac{1}{2}-2}=\frac{x-0}{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}$,即 $y=-\sqrt{3}x+2$. 因为 N 在 EB_1 上,所以可设 $N(x_0,-\sqrt{3}x_0+2,0)$,则 $\overrightarrow{MN}=(x_0,-\sqrt{3}x_0+2,-m)$. 由 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{EB_1}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{2}m=0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0-\frac{3\sqrt{3}}{2}x_0+3=0\end{cases}$,解得 $m=0$, $x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\overrightarrow{MN}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$,则 $|\overrightarrow{MN}|=1$.

例 11 已知矩形 $ABCD$ 中, $BC=2\sqrt{2}$, E 和 F 分别是 AB 和 CD 上的点, $EF/\!/BC$, $AE=2$, $BE=2\sqrt{3}$,以 EF 为轴按顺时针方向将 $EFDA$ 旋转 30°到 $EFD'A'$,将 $EFCB$ 按逆时针方向旋转 60°到 $EFC'B'$,求直线 $A'C'$ 与直线 EB' 之间的距离.

解 以 E 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.127 所示,由 A' 作 $A'H\perp x$ 轴于 H,由 $A'E=AE=2$, $\angle A'EH=30°$ 得 $A'H=2\sin 30°=1$, $EH=2\cos 30°=\sqrt{3}$,所以 $A'(-\sqrt{3},0,-1)$,同样可得 $B'(\sqrt{3},0,-3)$. 因为 $B'C'/\!/y$ 轴,所以 $C'(\sqrt{3},2\sqrt{2},-3)$, $\overrightarrow{A'C'}=(2\sqrt{3},2\sqrt{2},-2)$,

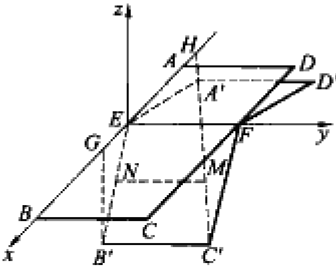


图 8.127

$\overrightarrow{EB'}=(\sqrt{3},0,-3)$. 设 $A'C'$ 与 EB' 公垂线方向上的向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{A'C'}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EB'}$ 得 $\begin{cases}2\sqrt{3}x+2\sqrt{2}y-2z=0\\ \sqrt{3}x-3z=0\end{cases}$，令 $z=1$，则 $x=\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{2},1)$.

其单位向量 $\boldsymbol{e}=\dfrac{(\sqrt{3},-\sqrt{2},1)}{\sqrt{3+2+1}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$，$\overrightarrow{EA}=(-\sqrt{3},0,-1)$，则 $A'C'$ 与 EB' 之间的距离 $d=|\overrightarrow{EA_1}\cdot\boldsymbol{e}|=\left|-\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

例 12 [2007·重庆文三(19)]在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=1$，$BC=\dfrac{3}{2}$，$AA_1=2$，点 D 在棱 BB_1 上，$BD=\dfrac{1}{3}BB_1$，$B_1E\perp A_1D$，垂足为 E，求异面直线 A_1D 与 B_1C_1 的距离.

解一 以点 B 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.128，则 $A(0,1,0)$，$A_1(0,1,2)$，$B_1(0,0,2)$，$C(\dfrac{3}{2},0,0)$，$C_1(\dfrac{3}{2},0,2)$，$D(0,0,\dfrac{2}{3})$，所以 $\overrightarrow{B_1C_1}=(\dfrac{3}{2},0,0)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,-1,-\dfrac{4}{3})$.

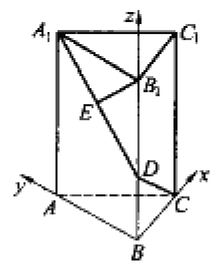


图 8.128

设 $E(0,y_0,z_0)$，则 $\overrightarrow{B_1E}=(0,y_0,z_0-2)$. 因为 $\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0$，所以 $B_1E\perp B_1C_1$，又由 $B_1E\perp A_1D$，所以 B_1E 是异面直线 A_1D 与 B_1C_1 的公垂线段. 由 $B_1E\perp A_1D$ 得

$$-y_0-\frac{4}{3}(z_0-2)=0 \qquad ①$$

$$\overrightarrow{A_1E}=(0,y_0-1,z_0-2)$$

由 $\overrightarrow{A_1E}$ 与 $\overrightarrow{A_1D}$ 共线得

$$\frac{y_0-1}{-1}=\frac{z_0-2}{-\frac{4}{3}} \qquad ②$$

解①，②得 $y_0=\dfrac{16}{25}$，$z_0=\dfrac{38}{25}$，所以 $E(0,\dfrac{16}{25},\dfrac{38}{25})$，$\overrightarrow{B_1E}=(0,\dfrac{16}{25},-\dfrac{12}{25})$，所以 $|\overrightarrow{B_1E}|=\dfrac{4}{5}$.

解二 同解一得 $\overrightarrow{A_1D}=(0,-1,-\dfrac{4}{3})$，$\overrightarrow{B_1C_1}=(\dfrac{3}{2},0,0)$. 设异面直线 A_1D

与 B_1C_1 的公垂线方向上的向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$，由 $\overrightarrow{A_1D}\perp\boldsymbol{n}$，$\overrightarrow{B_1C_1}\perp\boldsymbol{n}$ 得 $\begin{cases}-y_0-\dfrac{4}{3}z_0=0\\ \dfrac{3}{2}x_0=0\end{cases}$，令 $z_0=3$，得 $x_0=0$，$y_0=-4$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,-4,3)$，又 $\overrightarrow{DB_1}=(0,0,\dfrac{4}{3})$，所以异面直线 A_1D 与 B_1C_1 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{DB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{5}$.

例 13　三棱柱的底面是边长为 a 的正三角形，侧棱 A_1A 与底面两边 AB，AC 都成 $45°$.

(1)求证：侧面 $BB_1A_1A\perp$ 侧面 CC_1A_1A；

(2)求 AA_1 与 BC 之间的距离.

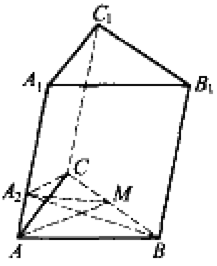


图 8.129

证明　(1)如图 8.129，过点 B 在面 BB_1A_1A 内作 $BA_2\perp A_1A$ 于 A_2，联结 A_2C，由 $\triangle BA_2A\cong\triangle CA_2A$，得 $A_2B=A_2C$，$\angle BA_2A=\angle CA_2A=90°$，所以 $A_2A\perp$ 平面 BA_2C，则 $A_2C\perp A_1A$，故 $\angle BA_2C$ 为二面角 $B-A_1A-C$ 的平面角.

取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{e}_3$ 为基底，设 $|\overrightarrow{AA_1}|=b$，则 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{2}a^2$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab$. 设 $\overrightarrow{AA_2}=k\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{BA_2}=\overrightarrow{AA_2}-\overrightarrow{AB}=k\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1$. 因为 $\overrightarrow{BA_2}\perp\overrightarrow{AA_2}$，所以 $k\boldsymbol{e}_3\cdot(k\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1)=0$，即 $k^2b^2-k\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab=0$，$k=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{b}$，所以 $\overrightarrow{AA_2}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2b}\boldsymbol{e}_3$. 因为

$$\overrightarrow{A_2B}\cdot\overrightarrow{A_2C}=\left(\boldsymbol{e}_1-\frac{\sqrt{2}a}{2b}\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}_2-\frac{\sqrt{2}a}{2b}\boldsymbol{e}_3\right)=$$
$$\frac{1}{2}a^2-\frac{\sqrt{2}a}{2b}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}ab-\frac{\sqrt{2}a}{2b}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}ab+\left(\frac{\sqrt{2}a}{2b}\right)^2\cdot b^2=0$$

所以

$$\cos\angle BA_2C=\cos<\overrightarrow{A_2B},\overrightarrow{A_2C}>=\frac{\overrightarrow{A_2B}\cdot\overrightarrow{A_2C}}{|\overrightarrow{A_2B}||\overrightarrow{A_2C}|}=0,\angle B_2AC=90°$$

因此侧面 $BB_1A_1A\perp$ 侧面 CC_1A_1A.

(2)过 A_2 作 $A_2M\perp BC$ 于点 M，则点 M 为 BC 中点. 由 $A_2A\perp$ 平面 BA_2C 得 $AA_1\perp A_2M$，因此 A_2M 就是 AA_1 与 BC 之间的距离. 因为

$$\overrightarrow{A_2M}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AA_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AA_2}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2-\frac{\sqrt{2}a}{2b}\boldsymbol{e}_3$$

所以

$$|\overrightarrow{A_2M}|^2=\left(\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2-\frac{\sqrt{2}a}{2b}e_3\right)^2=$$

$$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{\sqrt{2}a}{2b}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}ab-\frac{\sqrt{2}a}{2b}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}ab=\frac{1}{4}a^2$$

所以$|\overrightarrow{A_2M}|=\frac{1}{2}a$，即 AA_1 与 BC 之间的距离为$\frac{1}{2}a$.

例 14 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，求异面直线 DA_1 与 AC 的距离.

解一 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.130 所示，则 $A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B_1(1,1,1)$，联结 CB_1，AB_1. 因为 $A_1D /\!/ B_1C$，所以 $A_1D /\!/$ 平面 ACB_1，则点 D 到平面 ACB_1 的距离就是异面直线 DA_1 与 AC 的距离.

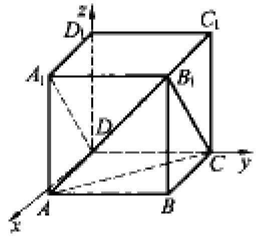


图 8.130

设平面 ACB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,1)$. 由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB_1}$，得 $\begin{cases}-x+y=0\\ y+z=0\end{cases}$，令 $y=1$，得 $x=1$，$z=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$. 又$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，所以点 D 到平面 ACB_1 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此异面直线 DA_1 与 AC 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解二 利用公式，详解略.

（五）求直线和与之平行的平面间距离的方法

1. 公式法. 如图 8.131，直线 $l /\!/$ 平面 α，P 为 l 上任一点，Q 为 c 上任一点，$PO\perp\alpha$ 于点 O，$\boldsymbol{e}$ 为平面法向量方向上的单位向量，则$|PO|=|\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{e}|$.

即直线和与之平行的平面间距离等于联结直线上任一点与平面上任一点所得向量与该平面法向量方向上的单位向量数量积的绝对值.

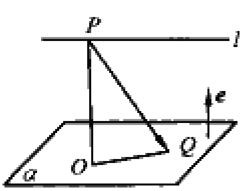


图 8.131

2. 垂线段法. 过直线上一点作平面的垂线，求出垂线段的长.

例 15 已知在边长为 $4\sqrt{2}$的正△ABC 中，E，F 分别为 BC 和 AC 的中点，$PA\perp$平面 ABC，且 $PA=2$，设平面 α 过 PF 且与 AE 平行，求 AE 与平面α 间的距离.

解 因为△ABC 为等边三角形，E 为 BC 中点，所以 $AE\perp BC$. 过 A 作

$AD // BC$，则 $AD \perp AE$. 以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系如图 8.132 所示，$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{6}$，则 $E(0,2\sqrt{6},0)$，$C(-2\sqrt{2},2\sqrt{6},0)$，$F(-\sqrt{2},\sqrt{6},0)$，$P(0,0,2)$，$\overrightarrow{PF}=(-\sqrt{2},\sqrt{6},-2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2\sqrt{6},0)$. 设平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{PF}\perp \boldsymbol{n}$，$\overrightarrow{AE}\perp \boldsymbol{n}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{2}x+\sqrt{6}y-2z=0\\ 2\sqrt{6}y=0\end{cases}$，取 $x=\sqrt{2}$，得 $z=-1$，$y=0$，所以

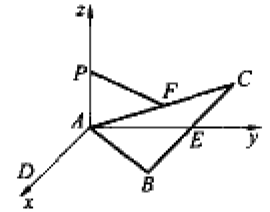


图 8.132

$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,-1)$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，则 AE 和平面 α 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 16　已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E，F 分别是 AB，AD 的中点，H 是 EF 与 AC 的交点，$CG\perp$ 面 $ABCD$，且 $CG=2$，求直线 BD 到面 EFG 的距离.

解　以 C 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.133所示，则 $O(2,2,0)$，$G(0,0,2)$，$E(2,4,0)$，$F(4,2,0)$，$H(3,3,0)$，易证 $BD //$ 面 EFG. 设 AC 与 BD 相交于点 O，联结 GH，过 O 作 $OM\perp GH$ 于点 M，易证 $OM\perp$ 面 EFG，所以 OM 即直线 BD 到面 EFG 的距离. $\overrightarrow{GH}=(3,3,-2)$，设 $\overrightarrow{GM}=\lambda\overrightarrow{GH}$，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{GO}=(3\lambda,3\lambda,-2\lambda)-(2,2,-2)=(3\lambda-2,3\lambda-2,-2\lambda+2)$. 又 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{GH}=0$，所以 $3(3\lambda-2)+3(3\lambda-2)-2(2-2\lambda)=0$，解得 $\lambda=\frac{8}{11}$，所以 $\overrightarrow{OM}=\left(\frac{2}{11},\frac{2}{11},\frac{6}{11}\right)$，则 $\overrightarrow{OM}=\sqrt{\left(\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{11}\right)^2}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$，即直线 BD 到面 EFG 的距离为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

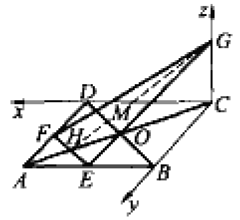


图 8.133

（六）求两平行平面间距离的方法

1. 公式法. 如图 8.134，平面 $\alpha //$ 平面 β，P 为平面 α 上任一点，Q 为平面 β 上任一点，$PO\perp\beta$ 于 O，$\boldsymbol{e}$ 为平面 α（或平面 β）的法向量方向上的单位向量，则 $|PO|=|\overrightarrow{PQ}\cdot \boldsymbol{e}|$.

即两平行平面间距离等于联结两平面上各任一点所得的向量与任一平面的法向量方向上的单位向量数量积的绝对值.

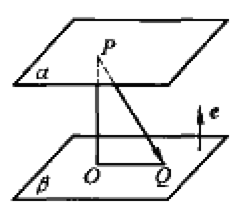


图 8.134

2.公垂线法.转化求两平面的公垂线段的长.

例 17 如图 8.135,已知 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱,E,E_1 分别是 AC,A_1C_1 的中点.

(1)求证:平面 AB_1E_1 // 平面 BEC_1.

(2)当该棱柱各棱长都为 a 时,求(1)中两个平行平面的距离.

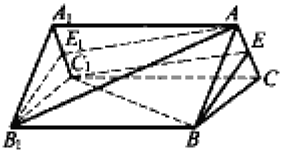


图 8.135

证明 (1)略.

(2)以点 C 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.136 所示,则 $C_1(0,0,a)$,$E\left(\frac{a}{2},0,0\right)$,$B\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$,$A(a,0,0)$,$\overrightarrow{EB}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$,$\overrightarrow{EC_1}=\left(-\frac{a}{2},0,a\right)$.设平面 BEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

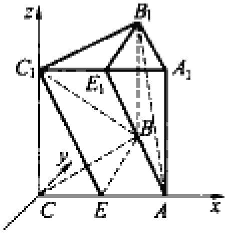


图 8.136

由 $\overrightarrow{EB}\perp\boldsymbol{n}$,$\overrightarrow{EC_1}\perp\boldsymbol{n}$ 得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}ay=0\\-\frac{a}{2}x+az=0\end{cases}$,取 $x=2$,得 $z=1$,$y=0$,所以 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$.法向量方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}=\frac{(2,0,1)}{\sqrt{4+1}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{a}{2},0,0\right)$,则平面 AB_1E_1 与平面 BEC_1 的距离 $d=|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{e}|=\left|-\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

例 18 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle ABC=90°$,$BC=2$,$CC_1=4$,$EB_1=1$,D,F,G 分别为 CC_1,B_1C_1,A_1C_1 的中点,EF 与 B_1D 相交于点 H.

(1)求证:$B_1D\perp$ 平面 ABD;

(2)求证:平面 EGF // 平面 ABD;

(3)求平面 EGF 与平面 ABD 的距离.

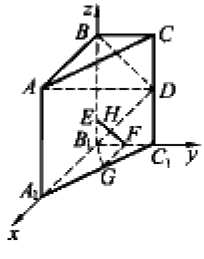


图 8.137

解一 以 B_1 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.137所示.设 $A_1(a,0,0)$,则 $C_1(0,2,0)$,$F(0,1,0)$,$E(0,0,1)$,$A(a,0,4)$,$B(0,0,4)$,$D(0,2,2)$,$G(\frac{a}{2},1,0)$.

(1)略.

(2)略.

(3)由(1),(2)知 DH 为平面 EFG 与平面 ABD 的公垂线段.设 $\overrightarrow{B_1H}=$

$\lambda\overrightarrow{B_1D}=(0,2\lambda,2\lambda)$，则 $H(0,2\lambda,2\lambda)$，所以 $\overrightarrow{EH}=(0,2\lambda,2\lambda-1)$，$\overrightarrow{EF}=(0,1,-1)$．因为 $\overrightarrow{EH}$ 与 $\overrightarrow{EF}$ 共线，所以 $\frac{2\lambda}{1}=\frac{2\lambda-1}{-1}$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$，所以 $H(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，则 $\overrightarrow{HD}=(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，所以 $|\overrightarrow{HD}|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．因此，平面 EFG 与平面 ABD 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

解二　(3)设平面 EFG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{EF}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{FG}=(\frac{a}{2},0,0)$．由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EF}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{FG}$ 得 $\begin{cases}y-z=0\\ \frac{a}{2}x=0\end{cases}$，取 $z=1$ 得 $x=0$，$y=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$．又 $\overrightarrow{EB}=(0,0,3)$，所以平面 EGF 与平面 ABD 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$．

四、走进考场 18

1.［2008·北京文理三(16)］如图 8.138，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC=BC=2$，$\angle ACB=90°$，$AP=BP=AB$，$PC\perp AC$．

(1)求证：$PC\perp AB$；

(2)求二面角 $B-AP-C$ 的大小；

(3)［理科］求点 C 到平面 APB 的距离．

2.［2008·重庆理三(19)］如图 8.139，在△ABC 中，$\angle B=90°$，$AC=\frac{15}{2}$，D，E 两点分别在 AB，AC 上，使 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=2$，$DE=3$，现将△$ABC$ 沿 DE 折成直二面角．

(1)求异面直线 AD 与 BC 的距离；

(2)求二面角 $A-EC-B$ 的大小(用反三角函数表示)．

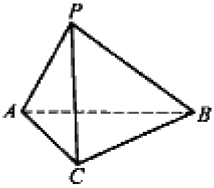


图 8.138

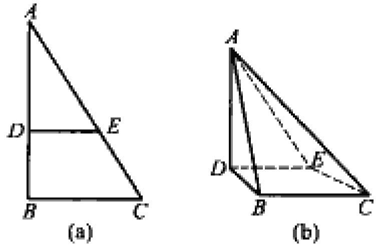


图 8.139

3.[2007·重庆理三(19)]如图 8.140,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1=2$,$AB=1$,$\angle ABC=90°$,点 D,E 分别在 BB_1,A_1D 上,且 $B_1E\perp A_1D$,四棱锥 $C-ABDA_1$ 与直三棱柱的体积之比为 3:5.

(1)求异面直线 DE 与 B_1C_1 的距离.

(2)若 $BC=\sqrt{2}$,求二面角 A_1-DC_1-B 的平面角的正切值.

4.[2007·福建理三(18),文三(19)]如图 8.141,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2,D 为 CC_1 中点.

(1)求证:$AB_1\perp$平面 A_1BD;

(2)求二面角 $A-A_1D-B$ 的大小;

(3)[理科]求点 C 到平面 A_1BD 的距离.

5.[2007·湖北文一(15)]如图 8.142,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别为棱 AA_1,BB_1 的中点,G 为棱 A_1B_1 上的一点,且 $A_1G=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则点 G 到平面 D_1EF 的距离为 ( )

A.$\sqrt{3}$ B.$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ C.$\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{3}$ D.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

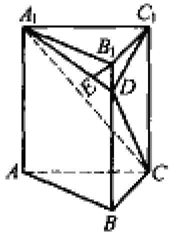


图 8.140

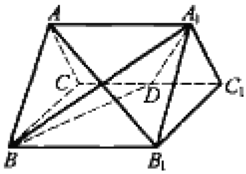


图 8.141

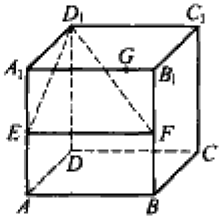


图 8.142

6.[2006·天津文、理二(13)]如图 8.143,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=1$,若二面角 $C-AB-C_1$ 的大小为 60°,则

[理科]点 C 到平面 ABC_1 的距离为________.

[文科]点 C_1 到直线 AB 的距离为________.

7.[2006·福建理三(18)、文三(19)]如图 8.144,四面体 $ABCD$ 中,O,E 分别是 BD,BC 的中点,$CA=CB=CD=BD=2$,$AB=AD=\sqrt{2}$.

(1)求证:$AO\perp$平面 BCD;

(2)求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小;

(3)求点 E 到平面 ACD 的距离.

8.[2006·湖北文三(18)]如图 8.145,已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱

长和底面边长均为 1，M 是底面 BC 边上的中点，N 是侧棱 CC_1 上的点，且 $CN=2C_1N$.

(1)求二面角 B_1-AM-N 的平面角的余弦值；

(2)求点 B_1 到平面 AMN 的距离.

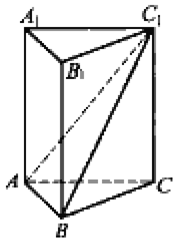


图 8.143

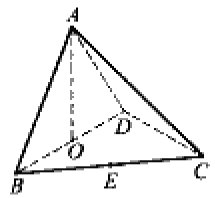


图 8.144

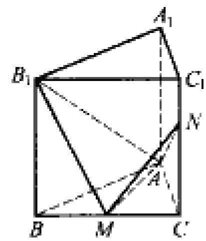


图 8.145

9.［2006·湖南文、理三(18)］如图 8.146，已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高分别为 1 和 2.［文科：高都为 2］，$AB=4$.

(1)证明：$PQ\perp$平面 $ABCD$；

(2)求异面直线 AQ 与 PB 所成的角；

(3)求点 P 到平面 QAD 的距离.

10.［2006·山东文二(16)］如图 8.147，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，所有棱长均为 1，则点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为________.

11.［2006·山东理三(19)］如图 8.148，已知平面 $A_1B_1C_1$ 平行于三棱锥 $V-ABC$ 的底面 ABC，等边$\triangle AB_1C$ 所在平面与底面 ABC 垂直，且$\angle ACB=90°$，设 $AC=2a$，$BC=a$.

(1)求证：直线 B_1C_1 是异面直线 AB_1 与 A_1C_1 的公垂线；

(2)求点 A 到平面 VBC 的距离；

(3)求二面角 $A-VB-C$ 的大小.

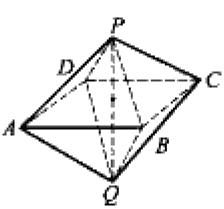


图 8.146

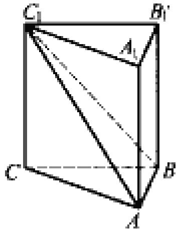


图 8.147

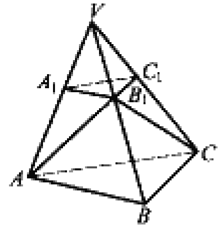


图 8.148

12.［2006·四川理三(19)、文三(20)］如图 8.149，在长方体 $ABCD-$

$A_1B_1C_1D_1$ 中 E，P 分别是 BC，A_1D_1 的中点，M，N 分别是 AE，CD_1 的中点，$AD=AA_1=a$，$AB=2a$.

(1)求证：MN∥面 ADD_1A_1；

(2)求二面角 $P-AE-D$ 的大小；

(3)[理科]求三棱锥 $P-DEN$ 的体积.

13.[2006·浙江文一(8)]如图 8.150，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都为 2，E，F 分别是 AB，A_1C_1 的中点，则 EF 的长是　　　(　)

A. 2　　　B. $\sqrt{3}$　　　C. $\sqrt{5}$　　　D. $\sqrt{7}$

14.[2005·福建理三(20)、文三(21)]如图 8.151，直二面角 $D-AB-E$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$AE=EB$，F 为 CE 上的点，且 $BF\perp$平面 ACE.

(1)求证：$AE\perp$平面 BCE；

(2)求二面角 $B-AC-E$ 的大小；

(3)求点 D 到平面 ACE 的距离.

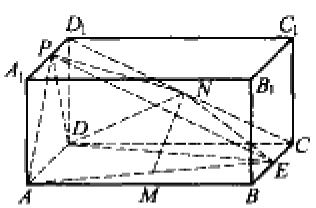


图 8.149

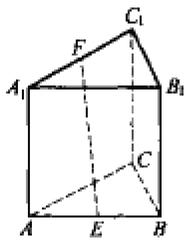


图 8.150

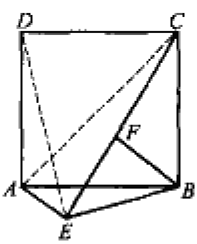


图 8.151

15.[2005·湖北文三(20)]如图 8.152，多面体是由底面为 $ABCD$ 的长方体被截面 AEC_1F 所截而得到的，其中 $AB=4$，$BC=2$，$CC_1=3$，$BE=1$.

(1)求 BF 的长；

(2)求点 C 到平面 AEC_1F 的距离.

16.[2005·重庆文三(20)]如图 8.153，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PD\perp$底面 $ABCD$，E 是 AB 上一点，$PE\perp EC$，已知 $PD=\sqrt{2}$，$CD=2$，$AE=\frac{1}{2}$.

(1)求异面直线 PD 与 EC 的距离；

(2)求二面角 $E-PC-D$ 的大小.

17.[2005·辽宁文理二(14)]如图 8.154，正方体的棱长为 1，C，D 分别是两条棱的中点，A，B，M 是顶点，那么点 M 到截面 $ABCD$ 的距离是________.

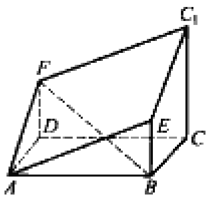


图 8.152

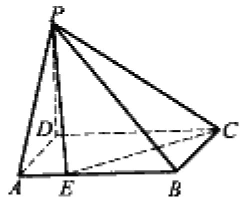


图 8.153

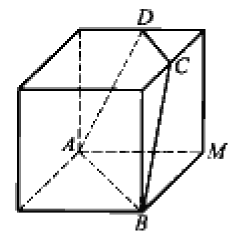


图 8.154

18.[2005·江苏文理一(4)]如图 8.155,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,若 $AB=2,AA_1=1$,则点 A 到平面 A_1BC 的距离为　　　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　　　D. $\sqrt{3}$

19.[2005·山东文理三(20)]如图 8.156,已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=2,AA_1=1$,直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 $30°$, AE 垂直 BD 于 E, F 为A_1B_1 的中点.

(1)求异面直线 AE 与 BF 所成的角;

(2)求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成二面角(锐角)的大小;

(3)求点 A 到平面 BDF 的距离.

20.[2004·福建理三(19)]在三棱锥 $S-ABC$ 中,$\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形,平面 $SAC\perp$平面 ABC, $SA=SC=2\sqrt{3}$, M,N 分别为 AB,SB 的中点.

(1)证明:$AC\perp SB$;

(2)求二面角 $N-CM-B$ 的大小;

(3)求点 B 到平面 CMN 的距离.

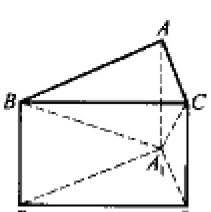


图 8.155

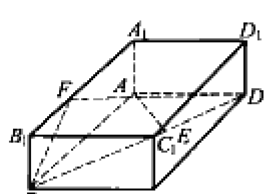


图 8.156

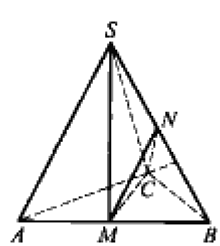


图 8.157

21.[2004·福建文三(19)]在三棱锥 $S-ABC$ 中,$\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形,平面 $SAC\perp$平面 ABC, $SA=SC=2\sqrt{2}$, M 为 AB 的中点.

(1)证明:$AC\perp SB$;

(2)求二面角 $S-CM-A$ 的大小;

(3)求点 B 到平面 SCM 的距离.

22.[2004·江苏文理三(18)]如图 8.158,在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,O 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心,点 P 在棱 CC_1 上,且 $CC_1=4CP$.

(1)求直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成角的大小(结果用反三角函数值表示);

(2)设点 O 在平面 D_1AP 上的射影是 H,求证:$D_1H\perp AP$;

(3)求点 P 到平面 ABD_1 的距离.

23.[2003·北京春理三(19)]如图 8.159,正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面边长为 $2\sqrt{2}$,侧棱长为 4,E,F 分别为棱 AB,BC 的中点,$EF\cap BD=G$.

(1)求证:平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1B_1;

(2)求点 D_1 到平面 B_1EF 的距离 d;

(3)求三棱锥 B_1-EFD_1 的体积 ∇.

24.[2003·北京理三(17)]如图 8.160,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 3,侧棱 $AA_1=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,$D$ 是 CB 延长线上一点,且 $BD=BC$.

(1)求证:直线 BC_1 // 平面 AB_1D;

(2)求二面角 B_1-AD-B 的大小;

(3)求三棱锥 C_1-ABB_1 的体积.

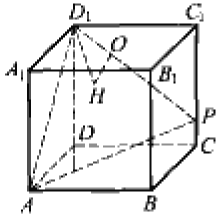


图 8.158

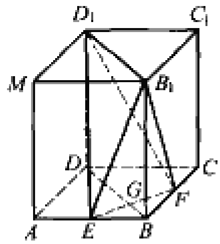


图 8.159

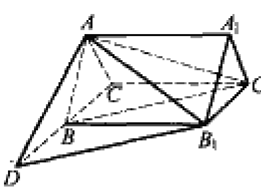


图 8.160

五、答案与提示

1.(2)$\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (3)$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 提示:(2)以 C 为坐标原点,以 CB,CA,CD 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,设 $CP=t$,由 $|PB|=|AB|=2\sqrt{2}$,得 $t=2$,求出两半平面的法向量

2.(1)2　(2)arctan $\frac{5}{3}$　提示:以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系.(1)DB为异面直线 AD 与 BC 的公垂线段　(2)分别求出两半平面的法向量

3.(1)$\frac{2\sqrt{29}}{29}$　(2)$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　提示:(1)以 B 为坐标原点建立空间直角坐标系,设 $BC=a$,又设 $E(0,y_0,z_0)$. $\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0$,所以 B_1E 是异面直线 DE 与 B_1C_1 的公垂线段,设 $D(0,0,z)$,四棱锥 $C-ABDA_1$ 的体积 $\nabla_1=\frac{1}{3}S_{ABDA_1}\cdot|BC|=\frac{1}{6}(z+2)|BC|$,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $\nabla_2=S_{\triangle ABC}\cdot|AA_1|=|BC|$. 由 $\frac{1}{6}(z+2)=\frac{3}{5}$ 得 $z=\frac{8}{5}$,所以 $D(0,0,\frac{8}{5})$. 由 $\overrightarrow{B_1E}\perp\overrightarrow{DA_1}$,$\overrightarrow{DE}\parallel DA_1$ 可求得垂足 E 的坐标,$E(0,\frac{4}{29},\frac{48}{29})$　(2)分别求出两半平面的法向量

4.(2)arccos $\frac{\sqrt{6}}{4}$　(3)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　提示:取 BC 中点 O,联结 AO,以 O 为坐标原点,OB,OA 分别为 x,z 轴建立空间直角坐标系(y 轴 $\parallel BB_1$).(1)求出平面 A_1BD 的法向量　(2)平面 AA_1D 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(-\sqrt{3},0,1)$,$\overrightarrow{AB_1}$为平面 A_1BD 的法向量　(3)$d=\frac{|\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|}$

5.D　提示:以 D_1 为坐标原点建立空间直角坐标系

6.$\frac{3}{4}$　提示:以 A 为坐标原点,AC,AA_1 分别为 x 轴,z 轴建立空间直角坐标系,设 $A_1(0,0,z)$,求出平面 ABC_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$,平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$,由 $|\cos<\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2>|=\cos 60°$求得 z 的值

7.(2)arccos $\frac{\sqrt{2}}{4}$　(3)$\frac{\sqrt{21}}{7}$　提示:(1)联结 OC,由 $AO^2+CO^2=AC^2$ 知 $\angle AOC=90°$　(2)以 O 为坐标原点,OB,OC,OA 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系　(3)平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$

8.(1)$\frac{\sqrt{5}}{5}$　(2)1　提示:以 B 为坐标原点,BC,BB_1 所在直线为 y 轴,z 轴建立空间直角坐标系.(1)$\overrightarrow{B_1M}\perp\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{NM}\perp\overrightarrow{AM}$,$<\overrightarrow{MB_1},\overrightarrow{MN}>$ 为所求二面角的平面角　(2)平面 AMN 的一个法向量为$(0,-\frac{4}{3},1)$

9.[理科](2)arccos $\frac{\sqrt{3}}{9}$　(3)$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　[文科](2)arccos $\frac{1}{3}$　(3)$2\sqrt{2}$　提示:(1)联结 AC,BD. 设 $AC\cap BD=O$. $PO\perp$面 $ABCD$,$QO\perp$面 $ABCD$　(2)以 O 为坐标原点,OA,OB,OP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系.

$\overrightarrow{AQ}=(-2\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2\sqrt{2},-1)$　(3)平面 QAD 的一个法向量为$(1,-1,-\sqrt{2})$

10. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　提示：取 B 为坐标原点，BC，BB_1 所在直线分别为 x 轴，z 轴建立空间直角坐标系，求出平面 ABC_1 的法向量

11. (2)$\sqrt{3}a$　(3)$\arccos\frac{1}{4}$　提示：取 AC 中点 O，$B_1O\perp$平面 ABC，以 O 为坐标原点，OC，OB_1 所在直线分别为 y 轴，z 轴建立空间直角坐标系（x 轴$/\!/BC$），$B_1(0,0,\sqrt{3}a)$.(1)$\overrightarrow{B_1C_1}=\lambda\overrightarrow{BC}=(-\lambda a,0,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=\lambda\overrightarrow{AC}=(0,2\lambda a,0)$，$\overrightarrow{B_1C_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$，$\overrightarrow{B_1C_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0$　(2)平面 VBC 的一个法向量为$(0,\sqrt{3},1)$　(3)求出平面 AB_1B 和平面 CB_1B 的法向量

12. (2)$\arccos\frac{2\sqrt{21}}{21}$　(3)$\frac{a^3}{6}$　提示：以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系　(2)求出两平面的法向量　(3)求出平面 DEN 的法向量，得出 P 到面 DEN 的距离

13. C　提示：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1F}$

14. (2)$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$　(3)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　提示：以 AB 中点 O 为坐标原点，OE，OB 所在直线分别为 x 轴，y 轴（z 轴$/\!/BC$）建立空间直角坐标系.设 $E(a,0,0)$，则 $\overrightarrow{AE}=(a,1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(a,-1,-2)$.设$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CE}=(\lambda a,-\lambda,-2\lambda)$，则 $F(\lambda a,1-\lambda,2-2\lambda)$，$\overrightarrow{BF}=(\lambda a,-\lambda,2-2\lambda)$.由$\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{AC}$得 $-2\lambda+4-4\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$，$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{2}{3}a,-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$由$\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{AE}$得$\frac{2}{3}a^2-\frac{2}{3}=0$，所以 $a=1$，则 $E(1,0,0)$.(1)平面 BCE 的一个法向量为$(1,1,0)$　(2)平面 EAC 的一个法向量为$(-1,-1,1)$

15. (1)$2\sqrt{6}$　(2)$\frac{4\sqrt{33}}{11}$　提示：以 D 为坐标原点，DA，DC，DF 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系.(1)设 $F(0,0,z)$，由$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC_1}$得 $z=2$　(2)平面 AEC_1F 的一个法向量为$(1,-\frac{1}{4},1)$

16. (1)1　(2)$\frac{\pi}{4}$　提示：以 D 为坐标原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系.设 $DA=x$，由$\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{EC}$可得 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.(1)$(\sqrt{3},1,0)$是异面直线 PD 与 EC 的公垂线方向上的一个向量　(2)求出两个半平面的法向量

17.$\frac{2}{3}$　提示：也可在三棱锥 $C-ABM$ 中利用等体积法来求

18.B　提示：取 B_1C_1 中点 O，以 A_1 为坐标原点，A_1O，A_1A 所在直线分别为 x 轴，z 轴建立空间直角坐标系．求出平面 A_1BC 的法向量

19.(1)$\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$　(2)$\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$　(3)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　提示：以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系，直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角即 $\angle DBA=30°$，$E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$D(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$．(1)$\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}>=-\frac{\sqrt{2}}{4}$　(2)平面 BDF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$

20.(2)$\arccos\frac{1}{3}$　(3)$\frac{4\sqrt{2}}{3}$　提示：取 AC 中点 O，联结 OS，OB，$SO\perp AC\Rightarrow SO\perp$平面 ABC．以 O 为坐标原点，OA，OB，OS 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系．(1)$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{SB}=0$　(2)平面 CMN 的一个法向量为 $(\sqrt{2},-\sqrt{6},1)$，平面 CMB 的一个法向量为$\overrightarrow{OS}=(0,0,2\sqrt{2})$

21.(2)$\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$　(3)$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

22.(1)$\arccos\frac{\sqrt{561}}{33}$　(3)$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　提示：以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系．(1)AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角即$\angle APB$　(2)联结 D_1O，D_1O 在平面 D_1AP 的射影是 D_1H，由$\overrightarrow{D_1O}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ 得$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{D_1O}$　(3)求出平面 ABD_1 的法向量

23.(2)$\frac{16\sqrt{17}}{17}$　(3)$\frac{16}{3}$　提示：以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系．(1)平面 B_1EF 的一个法向量为 $(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},1)$，平面 BDD_1B_1 的一个法向量为$\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$
(3)求出 B_1 到平面 EFD_1 的距离或利用$\nabla_{B_1-EFD_1}-\nabla_{D_1-B_1EF}$来求

24.(2)$60°$　(3)$\frac{27}{8}$　提示：取 BC 中点 O 为坐标原点，OD，OA 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系（y 轴$/\!/BB_1$）．(1)平面 AB_1D 的一个法向量为$(1,\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3})$　(2)平面 ADB 的一个法向量为 $(0,1,0)$　(3)C_1 到平面 ABB_1 的距离 $d=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

第四节　向量法解立体几何中的条件探索型和存在性问题

一、高考内容

1. 空间中点、线、面间的位置关系
2. 空间中各种角
3. 空间中各种距离

二、高考要求(理科)

了解向量方法在研究立体几何问题中的应用.

三、解法指导

立体几何中的条件探索型问题和存在性问题可采用几何方法和代数方法两种方法来解.但由于涉及的点具有不确定性,用传统的几何方法来解难度较大,若用空间向量的方法来处理则思路简单,解法模式固定,操作简便,它无需进行复杂繁琐的作图、论证、推理,只需建立空间直角坐标系或选取基底,通过向量方法构造方程、函数式构造不等式,再进行坐标或向量运算,从而使问题得到解决.

(一)立体几何中条件探索型问题涉及的结论

线面各种位置关系(如平行、垂直等)、空间多种角、空间各种距离等,由前三节可见这些问题大多可用向量方法来解.

(二)立体几何中存在性问题解法的形式

一般以"是否存在"的形式出现,对"是否存在"这类讨论型问题,常是若存在,须要找出来;若不存在,须说明理由.其解法有假设法和直推法两种.假设法的一般解法是:先假定存在,然后根据已知条件或其他定理、公理、法则等推导下去,如与已知或其他定理、公理、法则等不发生矛盾,那么结论就存在;若发生矛盾,那么结论就不存在.直推法就是先不管结论,而从条件入手,经过逻辑推理,得出相应结论;还可以特例探求结论,再推论证明.在解题时我们大多采用假设法来解.

(三)立体几何条件探索型和存在性试题常见题型及解法

1. 在某线段 AB 上找一点 P，使某结论成立，解方程法步骤如下：

(1)设参数、设坐标法：设出点 P 坐标(x_0, y_0, z_0).

①若点 P 在坐标轴或坐标平面的某直线上，且直线方程可求，常用此法，如例 1、例 2.

②设比值法：设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$(或$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda$，要注意 λ 的取值范围)，如例 3，例 9.

(2)构造方程：计算出有关向量的坐标，然后代入结论成立须满足的关系式得到一个含参数的方程(组).

(3)解方程(组)：解方程(组)求出参数值，即可找到所求点的位置.

注意　(1)设出点 P 坐标时，有时还须利用$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AB}$共线的条件(对应坐标成比例)来求出 x_0, y_0, z_0 之间的某种关系，并以 x_0, y_0, z_0 中的某个值为参变量，另两个值用它来表示，从而减少未知数的个数，如例 2.

(2)遇"是否存在"的问题常转化为点的坐标所满足的方程(组)在指定范围内是否有解的问题，如例 4.

例 1　[2008·福建理三(18)]如图 8.161，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，侧棱 $PA=PD=\sqrt{2}$，底面 ABC 为直角梯形，其中 $BC\parallel AD$，$AB\perp AD$，$AD=2AB=2BC=2$，O 为 AD 的中点.

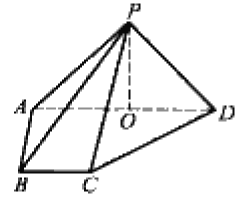


图 8.161

(1)求证：$PO\perp$平面 $ABCD$；

(2)求异面直线 PB 与 CD 所成角的大小；

(3)线段 AD 上是否存在点 Q，使得它到平面 PCD 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$？若存在，求出$\dfrac{AQ}{QD}$的值，若不存在，请说明理由.

解　(1)略.

(2)以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OP}$方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系(图 8.162)，则 $C(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,1)$.

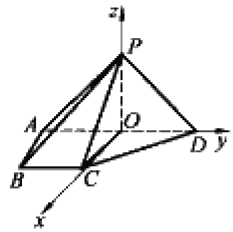


图 8.162

(3)假设在线段 AD 上存在点 Q，使得它到平面 PCD 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 设 $Q(0,y,0)(-1\leqslant y\leqslant 1)$，$\overrightarrow{QC}=(1,-y,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0, y_0, z_0)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-x_0+z_0=0\\ -x_0+y_0=0\end{cases}$，即 $x_0=y_0=z_0$，取 $x_0=1$，得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，依题意得 $\left|\dfrac{\overrightarrow{QC}\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\dfrac{|1-y|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $y=-\dfrac{1}{2}$ 或 $y=\dfrac{5}{2}$（舍去）. 此时 $|AQ|=\dfrac{1}{2}$，$|QD|=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{AQ}{QD}=\dfrac{1}{3}$，因此存在点 Q 满足题意，此时 $\dfrac{AQ}{QD}=\dfrac{1}{3}$.

例 2 [2006·江西理三(20)]在三棱锥 $A-BCD$ 中，侧面 ABD，ACD 是全等的直角三角形，AD 是公共的斜边，且 $AD=\sqrt{3}$，$BC=CD=1$，另一个侧面 ABC 是正三角形.

(1)求证：$AD\perp BC$；

(2)求二面角 $B-AC-D$ 的大小；

(3)在线段 AC 上是否存在一点 E，使 ED 与面 BCD 成 30°角？若存在，确定点 E 的位置；若不存在，说明理由.

解 作 $AH\perp$ 面 BCD 于 H，联结 BH，CH，则 $BH\perp BD$，$HC\perp CD$. 由 $AC=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}=BC$，而 $BC^2=BD^2+CD^2$，所以 $\angle BDC=90°$. 所以 $BH\parallel CD$，$HC\parallel BD$，则四边形 $BHCD$ 是正方形，则 $AH=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$. 以 D 为原点，建立空间直角坐标系如图 8.163 所示，则 $D(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$A(1,1,1)$.

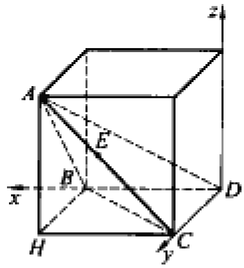


图 8.163

(1)$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，解法略；

(2)平面 BAC 的一个法向量为 $(1,1,-1)$；平面 ACD 的一个法向量为 $(1,0,-1)$；二面角 $B-AC-D$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(3)设 $E(x,y,z)$ 是线段 AC 上一点，$\overrightarrow{CE}=(x,y-1,z)$，$\overrightarrow{CA}=(1,0,1)$，因为 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 共线，所以 $\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{z}{1}\\ y-1=0\end{cases}$，则 $x=z>0$，$y=1$，所以 $E(x,1,x)$. 平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{DE}=(x,1,x)$. 要使 ED 与面 BCD 所成的角为 30°，$\overrightarrow{DE}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角应为 60°，所以 $\cos<\overrightarrow{DE},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DE}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}=$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$，则 $2x = \sqrt{1+2x^2}$，解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $CE = \sqrt{2}x = 1$．故线段 AC 上存在点 E，当 $CF = 1$ 时，ED 与面 BCD 所成的角为 $30°$．

例 3　[2004·湖南理三(19)]如图 8.164，在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle ABC = 60°$，$PA = AC = a$，$PB = PD = \sqrt{2}a$，点 E 在 PD 上，且 $PE:ED = 2:1$．

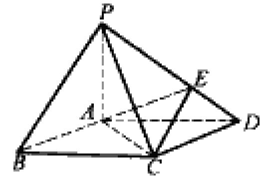


图 8.164

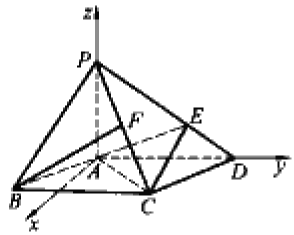
(1)证明：$PA \perp$ 平面 $ABCD$．

(2)求以 AC 为棱，EAC 与 DAC 为面的二面角 θ 的大小．

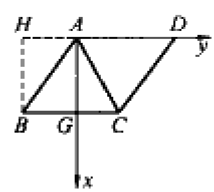
(3)在棱 PC 上是否存在一点 F，使 $BF /\!/$ 平面 AEC？证明你的结论．

解　(1)略．(2)略．

(3)因为 $PA = AB = a$，$PB = \sqrt{2}a$，所以 $PA \perp AB$，同理 $PA \perp AD$．以 A 为坐标原点，直线 AD，AP 分别为 y 轴，z 轴，在平面 $ABCD$ 内，过 A 垂直 AD 的直线为 x 轴，建立空间直角坐标系如图 8.165(a)所示．如图 8.165(b)，设 BC 交 x 轴于 G，因为 $\angle ABC = 60°$，所以 $\angle BAD = 180° - 60° = 120°$，而 $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 60°$，所以 $\triangle ABC$ 是正三角形，则 $AB = AC = BC = a$．因为 $AG \perp BC$，所以 $BG = a\cos 60° = \frac{1}{2}a$，$AG = a\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}a$．过 B 作 $BH \perp y$ 轴于 H．因为 $\angle BAH = 180° - 120° = 60°$，所以 $AH = a\cos 60° = \frac{a}{2}$，则 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2}, 0\right)$，



(a)



(b)

图 8.165

$CG = BG = \frac{1}{2}a$．由 $BC /\!/ y$ 轴，得 $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, 0\right)$，如图 8.165(a)，$D(0, a, 0)$，$P(0, 0, a)$．

$$\overrightarrow{PE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PD} = \frac{2}{3}(0, a, -a) = \left(0, \frac{2}{3}a, -\frac{2}{3}a\right)$$

所以 $E\left(0, \frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$．则

$$\overrightarrow{AE} = \left(0, \frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a\right), \quad \overrightarrow{AC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, 0\right)$$

$$\overrightarrow{PC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, -a\right), \quad \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, a\right)$$

设点 F 是棱 PC 上的点

$$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda,\frac{1}{2}a\lambda,-a\lambda\right)$$

其中 $0<\lambda<1$.则

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda-1),\frac{1}{2}a(\lambda+1),a(1-\lambda)\right)$$

令

$$\overrightarrow{BF}=\lambda_1\overrightarrow{AC}+\lambda_2\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda_1,\frac{1}{2}a\lambda_1+\frac{2}{3}a\lambda_2,\frac{1}{3}a\lambda_2\right)$$

得

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda-1)=\frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda_1\\ \frac{1}{2}a(\lambda+1)=\frac{1}{2}a\lambda_1+\frac{2}{3}a\lambda_2\\ a(1-\lambda)=\frac{1}{3}a\lambda_2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\lambda-1=\lambda_1\\ \lambda+1=\lambda_1+\frac{4}{3}\lambda_2\\ 1-\lambda=\frac{1}{3}\lambda_2\end{cases}$$

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,即 F 为 PC 的中点.

解二 同解一得

$$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda-1),\frac{1}{2}a(\lambda+1),a(1-\lambda)\right)$$

设$\triangle AEC$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$,得

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}ax+\frac{1}{2}ay=0\\ \frac{2}{3}ay+\frac{1}{3}az=0\end{cases}$$

令 $x=1$,得 $y=-\sqrt{3}$,$z=2\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$.由$\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda-1)-\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda+1)+2\sqrt{3}a(1-\lambda)=0$$

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,则 F 为 PC 中点时,BF∥平面 AEC.

解三 取$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{k}$ 为基向量,因为 $PA=AB=a$,$PB=\sqrt{2}a$,

所以 $PA\perp AB$.同理 $PA\perp AD$,则 $|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}|=a,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{1}{2}a^2$.因为 $PE:ED=2:1$,所以

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=\boldsymbol{k}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PD}=\boldsymbol{k}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$

设平面 AEC 的法向量

$$\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=a^2x-\frac{1}{2}a^2y-\frac{1}{2}a^2x+a^2y=$

$$\frac{1}{2}a^2(x+y)=0 \qquad ①$$

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot(\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k})=-\frac{1}{3}a^2x-\frac{2}{3}a^2y+\frac{1}{3}a^2z=$

$$\frac{1}{3}a^2(-x+2y+z)=0 \qquad ②$$

取 $z=1$ 得 $x=\frac{1}{3},y=-\frac{1}{3}$,所以 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,设

$$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}=\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\lambda(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$$

则 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}+\lambda(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=(\lambda-1)\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}+(1-\lambda)\boldsymbol{k}$

因为$\overrightarrow{BF}$//平面 AEC,所以$\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0$,即

$$[(\lambda-1)\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}+(1-\lambda)\boldsymbol{k}]\cdot(\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=$$

$$\frac{1}{3}(\lambda-1)a^2-\frac{1}{6}\lambda a^2+\frac{1}{6}(\lambda-1)a^2-\frac{1}{3}\lambda a^2+(1-\lambda)a^2=(\frac{1}{2}-\lambda)a^2=0$$

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,即 M 为 PC 中点.

解四 设基向量为$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{j},\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{k}$,取 DC 上一点 F,使$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}$.要 BF//平面 AEC,故假设$\overrightarrow{BF}=\lambda_1\overrightarrow{AC}+\lambda_2\overrightarrow{AE}$,一方面

$$\overrightarrow{BF}=\lambda_1\overrightarrow{AC}+\lambda_2\overrightarrow{AE}=\lambda_1(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})+\lambda_2(\boldsymbol{k}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PD})=$$

$$\lambda_1(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})+\lambda_2(\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k})=\lambda_1\boldsymbol{i}+(\lambda_1+\frac{2}{3}\lambda_2)\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\lambda_2\boldsymbol{k}$$

另一方面

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PF}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}+\lambda\overrightarrow{PC}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}+\lambda(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=$$
$$(\lambda-1)\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}+(1-\lambda)\boldsymbol{k}$$

所以
$$\begin{cases}\lambda-1=\lambda_1\\ \lambda=\lambda_1+\dfrac{2}{3}\lambda_2\\ 1-\lambda=\dfrac{1}{2}\lambda_2\end{cases}$$

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,所以在 PC 上存在一点 F,即 F 为 PC 的中点,使 BF//平面 AEC.

例 4 [2004·浙江文理三(19)]已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直,$AB=\sqrt{2}$,$AF=1$,M 是线段 EF 的中点.

(1)[理科]求证:AM//平面 BDE;[文科]求证:$AM\perp$平面 BDF.

(2)求二面角 $A-DF-B$ 的大小;

(3)[理科]试在线段 AC 上确定一点 P,使得 PF 与 BC 所成的角是 $60°$.

解 建立空间直角坐标系如图 8.166 所示,则(0,$\sqrt{2}$,0),$A(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$F(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$.

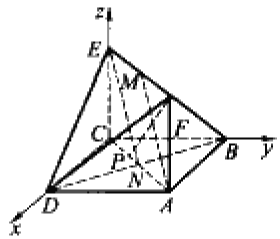


图 8.166

[理科]设 $AC\cap BD=N$,联结$\overrightarrow{NE}$,证$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NE}$.

[文科]证$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{DF}$,$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BF}$.

(2)$\overrightarrow{AB}$为平面 ADF 的法向量,$\overrightarrow{NE}$为平面 BDF 的法向量,二面角 $A-DF-B$ 的大小是 $60°$,解法略.

(3)设 $P(t,t,0)(0\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$,得$\overrightarrow{PF}=(\sqrt{2}-t,\sqrt{2}-t,1)$,$\overrightarrow{BC}=(0,-\sqrt{2},0)$.因为 PF 与 BC 所成的角是 $60°$,所以

$$\cos 60°=\frac{|\sqrt{2}(\sqrt{2}-t)|}{\sqrt{(\sqrt{2}-t)^2+(\sqrt{2}-t)^2+1}\times\sqrt{2}}$$

解得 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或 $t=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$(舍去),即点 P 是 AC 的中点.

例 5 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为$\sqrt{3}$,底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,侧面 $A_1ADD_1\perp$底面 $ABCD$,侧棱 A_1A 与底面$ABCD$ 所成角为 $60°$,且 $AB\perp AD$.

(1)求证:$A_1B\perp$平面 AB_1C_1D;

(2)在直线 BD 上是否存在一点 E,使 $A_1E\perp$平面 AB_1D_1? 并证明你的结论;

解 过 A_1 作 $A_1O\perp AD$ 于 O.因为平面 $A_1ADD_1\perp$平面 $ABCD$,所以 $A_1O\perp$平面 $ABCD$,$A_1O=\sqrt{3}$,且$\angle A_1AO$ 即为 A_1A 与底面 $ABCD$ 所成的角,所以$\angle A_1AO=60°$,则 $AO=1$,$A_1A=2$.

(1)略.

(2)由(1)$A_1B\perp AD$,所以 $AD\perp$平面 A_1OB,则$AD\perp OB$,且 $OB\ \sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$. 以 O 为坐标原点,OB, CD, OA_1 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系如图8.167所示,则 $A_1(0,0,\sqrt{3})$, $A(0,-1,0)$, $D_1(0,2,\sqrt{3})$. 因为侧面 B_1BCC_1 // 侧面 A_1ADD_1, 所以侧面 $B_1BCC_1\perp$底面 $ABCD$, 于是 $x_B=OB=\sqrt{3}$, $y_B=AO=1$, $z_B=A_1O=\sqrt{3}$, 所以 $B_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},2,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{B_1D_1}=(-\sqrt{3},1,0)$, 又 $B(\sqrt{3},0,0)$, $D(0,1,0)$, 所以在 xOy 平面内,直线 BD 的方程为 $\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{y}{1}=1$, 即 $x=\sqrt{3}(1-y)$. 因此可设 $E(\sqrt{3}(1-y),y,0)$, 则$\overrightarrow{A_1E}=(\sqrt{3}(1-y),y,-\sqrt{3})$. 由$\overrightarrow{A_1E}\perp\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{A_1E}\perp\overrightarrow{B_1D_1}$得$\begin{cases}3(1-y)+2y-3=0\\-3(1-y)+y=0\end{cases}$, 此方程解无解,因此在直线 BD 上不存在点 E,使 $A_1E\perp$平面 AB_1D_1.

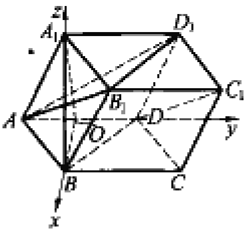


图 8.167

例 6　如图 8.168,矩形 $ABCD$ 中,$AB=1$, $BC=a$,又 $PA\perp$平面 $ABCD$,且 $PA=1$,问:BC 边上是否存在点 Q,使得 $PQ\perp QD$,并说明理由.

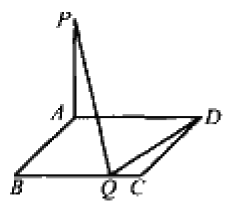


图 8.168

解　以 A 为坐标原点,$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP}$为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系如图 8.169,则 $B(1,0,0)$, $D(0,a,0)$, $P(0,0,1)$. 设 $Q(1,y,0)$,要使 $PQ\perp QD$,须$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QD}=0$,而$\overrightarrow{PQ}=(1,y,-1)$, $\overrightarrow{QD}=(-1,a-y,0)$,得 $-1+y(a-y)=0$,即 $y^2-ay+1=0$. 此方程要有实数解,须 $\Delta=a^2-4\geqslant0$,所以 $a\geqslant2$. 因此,当 $a\geqslant2$ 时,BC 边上存在点 Q,使得 $PQ\perp QD$.

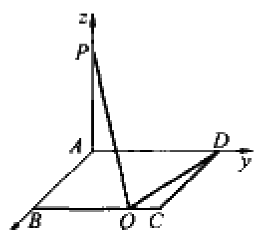


图 8.169

例 7　如图 8.170,在空间四边形 $OABC$ 中,OA, OB, BC 两两互相垂直,且 $OA=OB=BC=1$, N 为 OC 的中点,在线段 AB 上,是否存在一点 M,使 $MN\perp AB$? 若存在,求点 M 的位置;若不存在,请说明理由.

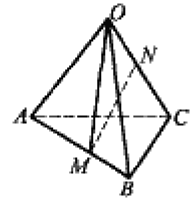


图 8.170

解　取基向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$,则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda}$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

因为$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$,所以$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,即

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda}\right]=0$$

又因为$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{BC}$两两互相垂直,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$,则

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda|\boldsymbol{b}|^2}{1+\lambda}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\frac{|\boldsymbol{a}|^2+\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{1+\lambda}=0$$

即
$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2-\frac{\lambda|\boldsymbol{b}|^2}{1+\lambda}+\frac{|\boldsymbol{a}|^2}{1+\lambda}=0$$

因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,所以

$$\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=0$$

所以
$$1+\lambda-2\lambda+2=0$$

则 $\lambda=3$,所以点 M 为 AB 的定比分点,且$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$.

2.在某平面上找一点(或求动点的轨迹),使某结论成立:解方程法.

设出点 P 坐标(x,y,z),充分利用题设条件求出 x,y,z 间的关系,以尽量减少未知数的个数,然后计算出有关向量的坐标并代入结论成立须满足的关系式得到一个方程(组),解方程(组)求出点 P 坐标,即可找到所求点的位置(或动点的轨迹).

例 8 [2005·湖北理三(20)]在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,侧棱 $PA\perp$底面 $ABCD$,$AB=\sqrt{3}$,$BC=1$,$PA=2$,E 为 PD 的中点.

(1)求直线 AC 与 PB 所成角的余弦值;

(2)在侧面 PAB 内找一点 N,使 $NE\perp$面 PAC,并求出点 N 到 AB 和 AP 的距离.

解 建立空间直角坐标系如图 8.171 所示,则 $A(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},0,0)$,$C(\sqrt{3},1,0)$,$D(0,1,0)$,$P(0,0,2)$,$E(0,\frac{1}{2},1)$.

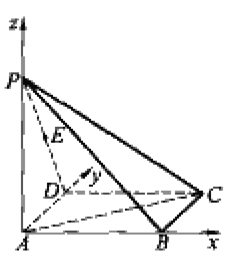


图 8.171

(1)AC 与 PB 所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{7}}{14}$,解法略.

(2)由于点 N 在侧面 PAB 内,所以可设 $N(x,0,z)$,则$\overrightarrow{NE}=(-x,\frac{1}{2},1-z)$.由 $NE\perp$面 PAC 可得

$\begin{cases}\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$,即

$$\begin{cases}(-x,\dfrac{1}{2},1-z)\cdot(0,0,2)=0\\ (-x,\dfrac{1}{2},1-z)\cdot(\sqrt{3},1,0)=0\end{cases}$$

化简$\begin{cases}z-1=0\\ -\sqrt{3}x+\dfrac{1}{2}=0\end{cases}$,所以$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\\ z=1\end{cases}$,即点 N 坐标为$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6},0,1\right)$,从而点 N 到 AB,AP 的距离分别为 $1,\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

例 9　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面上确定一点 P,使 A_1P 与 AB,B_1C_1 都成 $60°$的角.

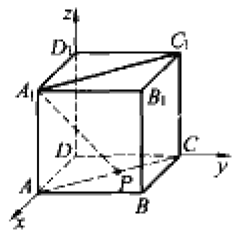


图 8.172

解　以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.172,设正方体棱长为 1,则 $A(1,0,0)$,$A_1(1,0,1)$,$B_1(1,1,1)$,$D_1(0,0,1)$.设 $P(x,y,z)$,则$\overrightarrow{A_1P}=(x-1,y,z-1)$,$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{A_1D_1}=(-1,0,0)$.因为 $A_1B_1/\!/AB$,$A_1D_1/\!/B_1C_1$,所以

$$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=|\overrightarrow{A_1P}||\overrightarrow{A_1B_1}|\cos 60°=\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_1P}|$$

$$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=|\overrightarrow{A_1P}||\overrightarrow{A_1D_1}|\cos 60°=\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_1P}|$$

则
$$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}$$

即 $y=-(x-1)$,所以 $x+y=1$,而当$\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$时,$P\in A_1A$;当$\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$时,$P\in C_1C$,均不合题意,所以 $0<x<1,0<y<1$.因为 P 在正方体表面上,所以 $z=0$ 或 $z=1$,但 $z=1$ 时,P 在 A_1C_1 上,此时 A_1P 与 AB,B_1C_1 都成 $45°$,不合题意,所以 $z=a$,则 P 在 AC 上.又

$$\cos 60°=\frac{\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}}{|\overrightarrow{A_1P}||\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+y^2+1}}=\frac{1}{2}$$

解得 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$($y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$不合),所以 $x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,则 $P\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,从而

$$|AP|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0^2}=1$$

所以 P 在底面对角线 AC 上且 $|AP|=1$.

例 10 M 为长方体 AC_1 的棱 BC 的中点，点 P 在长方体 AC_1 的一个面 CC_1D_1D 内，且 PM // 平面 BB_1D_1D，试探讨点 P 的轨迹.

解 以 D 为原点建立空间直角坐标系，设 $|DA|=a$，$|DC|=b$，$|DD_1|=c$，则 $B(a,b,0)$，$C(0,b,0)$，$D_1(0,0,c)$，所以 $M(\frac{1}{2}a,b,0)$. 设 $P(0,y,z)$，$\overrightarrow{PM}=(\frac{1}{2}a,b-y,-z)$，$\overrightarrow{DB}=(a,b,0)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,c)$. 因为 PM // 平面 BB_1D_1D，由共面向量定理，必存在实数对 (m,n)，使得 $\overrightarrow{PM}=m\overrightarrow{DB}+n\overrightarrow{DD_1}$，即 $(\frac{1}{2}a,b-y,-z)=(ma,mb,nc)$，所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}a=ma\\ b-y=mb\\ -z=nc\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}b\\ z=-nc\end{cases}$，所以 $P(0,\frac{1}{2}b,z)$. 由于 P 在面 CC_1D_1D 内，所以 $0<z<c$. 由 $y=\frac{1}{2}b$ 知 P 在棱 CD，C_1D_1 的中点连线上. 设 E，F 分别为 DC_1，D_1C_1 中点，则点 P 轨迹是线段 EF(不含端点).

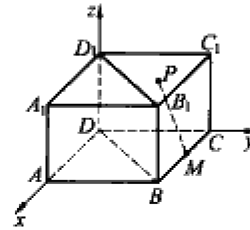


图 8.173

3. 求某字母值使某结论成立.

(1)解方程法：将所求字母值暂时看作常数参加坐标运算，依结论成立须满足的关系式建立方程(组)，解方程(组)即可求得待求字母的值，如例 8、例 9、例 11.

(2)有时先不考虑要求的字母值，依常规方法解题，解到最后自然而然得出所求字母值，如例 13.

例 11 [2008·浙江理三(18)、文三(20)]矩形 $ABCD$ 和梯形 $BEFC$ 所在平面互相垂直，BE // CF，$\angle BCF=\angle CEF=90°$，$AD=\sqrt{3}$，$EF=2$.

(1)求证：AE // 平面 DCF；

(2)当 AB 的长为何值时，二面角 $A-EF-C$ 的大小为 $60°$？

解 以 C 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.174所示，设 $AB=a$，$BE=b$，$CF=c$，则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$A(\sqrt{3},0,a)$，$E(\sqrt{3},b,0)$，$F(0,c,0)$.

(1)略.

(2)因为 $\overrightarrow{EF}=(-\sqrt{3},c-b,0)$，$\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},b,0)$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，$|\overrightarrow{EF}|=2$. 所以 $\begin{cases}-3+b(c-b)=0\\ \sqrt{3+(c-b)^2}=2\end{cases}$，解得

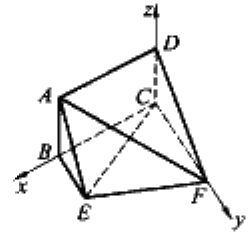


图 8.174

$\begin{cases} b=3 \\ c=4 \end{cases}$,所以 $E(\sqrt{3},3,0)$,$F(0,4,0)$.设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{AE}=(0,3,-a)$,$\overrightarrow{EF}=(-\sqrt{3},1,0)$,由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AE}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EF}$ 得 $\begin{cases} 3y-az=0 \\ -\sqrt{3}x+y=0 \end{cases}$,取 $x=1$,得 $y=\sqrt{3}$,$z=\dfrac{3\sqrt{3}}{a}$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{a})$.又因为 $BA\perp$ 平面 $BEFC$,所以 $\overrightarrow{BA}$ 为平面 EFC 的法向量,$\overrightarrow{BA}=(0,0,a)$,所以

$$|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{BA}>|=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BA}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{4a^2+27}}{a}}=\frac{1}{2}$$

解得 $a=\dfrac{a}{2}$.所以,当 AB 长为 $\dfrac{a}{2}$ 时,二面角 $A-EF-C$ 的大小为 $60°$.

例 12　[2007·湖北文三(17)]在三棱锥 $V-ABC$ 中,$VC\perp$ 底面 ABC,$AC\perp BC$,D 是 AB 的中点,且 $AC=BC=a$,$\angle VDC=\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$.

(1)求证:平面 $VAB\perp$ 平面 VCD;

(2)试确定 θ 的值,使得直线 BC 与平面 VAB 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$.

解　以 C 为坐标原点建立空间直角坐标系,如图 8.175 所示,$CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,则 $A(a,0,0)$,$B(0,a,0)$,$V(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta)$.

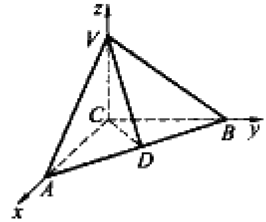


图 8.175

(1)略.

(2)设平面 VAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{AB}=(-a,a,0)$,$\overrightarrow{VA}=(a,0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta)$,由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{VA}$ 得 $\begin{cases} -ax+ay=0 \\ ax-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2\tan\theta=0 \end{cases}$,取 $x=1$,得 $y=1$,$z=\dfrac{\sqrt{2}}{\tan\theta}$,得 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2}\cot\theta)$.又 $\overrightarrow{BC}=(0,-a,0)$,于是

$$\sin\frac{\pi}{6}=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{BC}>|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{a}{a\sqrt{2+2\cot^2\theta}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$$

即 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$,故当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时,直线 BC 与平面 VAB 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$.

例 13 [2006·山东文三(20)]如图 8.176,已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为等腰梯形,$AB\parallel DC$,$AC\perp BD$,AC 与 BD 相交于点 O,且顶点 P 在底面上的射影恰为点 O.又 $BO=2$,$PO=\sqrt{2}$,$PB\perp PD$.

(1)求异面直线 PD 与 BC 所成角的余弦值;

(2)求二面角 $P-AB-C$ 的大小;

(3)设点 M 在棱 PC 上,且 $\frac{PM}{MC}=\lambda$,问 λ 为何值时,$PC\perp$平面 BMD.

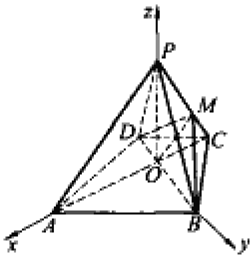


图 8.176

解 因为 $PO\perp$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp BD$.又 $PB\perp PD$,$BO=2$,$PO=\sqrt{2}$.由 $PO^2=DO\cdot OB$ 得 $DO=CO=1$,$AO=BO=2$.

以 O 为坐标原点,建立空间直角坐标系如图8.177所示,则 $A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$C(-1,0,0)$,$D(0,-1,0)$,$P(0,0,\sqrt{2})$.

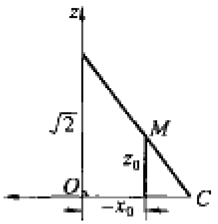


图 8.177

(1)直线 PD 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{15}}{15}$,解法略.

(2)二面角 $P-AB-C$ 的大小为 45°,解法略.

(3)如图 8.177,设 $M(x_0,0,z_0)$,由于 P,M,C 三点共线,所以

$$\frac{z_0}{\sqrt{2}}=\frac{1+x_0}{1},\ z_0=\sqrt{2}x_0+\sqrt{2} \qquad ①$$

$\overrightarrow{PC}=(-1,0,-\sqrt{2})$,因为 $PC\perp$平面 BMD,所以 $PC\perp OM$,则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{OM}=0$.即

$$x_0+\sqrt{2}z_0=0 \qquad ②$$

由①,②解得 $x_0=-\frac{2}{3}$,$z_0=\frac{\sqrt{2}}{3}$,所以 $M\left(-\frac{2}{3},0,\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.由 $\frac{CM}{CP}=\frac{z_0}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$,得 $\lambda=\frac{PM}{MC}=2$.因此当 $\lambda=2$ 时,$PC\perp$平面 BMD.

例 14 [2000 全国理三(18)、文三(19)、天津文理三(18)、广东文理三(19)]如图 8.178,已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底是菱形,且$\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$[理科:$\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$].

(1)求证:$C_1C\perp BD$.

(2)[理科]假定 $CD=2$,$CC_1=\frac{3}{2}$,记面 C_1BD 为 α,

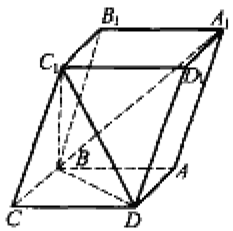


图 8.178

面 CBD 为 β，求二面角 $\alpha-BD-\beta$ 的平面角的余弦值.

(2)[文科]当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.

(3)[理科]同文科(2).

证明　(1)设 $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{c}$ 为空间的一个基底，设菱形的边长为 m，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 中两两所夹角为 θ，于是 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\cos\theta-|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$，所以 $\overrightarrow{CC_1}\perp\overrightarrow{BD}$，即 $CC_1\perp BD$.

(2)[文科]设 $\frac{CD}{CC_1}=\lambda(\lambda>0)$，即 $|\overrightarrow{CD}|=\lambda|CC_1|$，亦即 $|\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{c}|$ 时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD. 因为 $C_1D\subset$ 平面 BC_1D，$BD\subset$ 平面 BC_1D，所以 $A_1C\perp C_1D$，且 $A_1C\perp BD$. 则

$$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0,\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=0$$

因为

$$\overrightarrow{A_1C}=-\overrightarrow{CA_1}=-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC_1})=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$$

所以

$$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{C_1D}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2=$$

$$-m^2-m\cdot m\cos\theta+m\cdot\frac{m}{\lambda}\cos\theta+\frac{m^2}{\lambda^2}$$

令 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0$，得 $\lambda=1$ 时，$A_1C\perp C_1D$. 同理可证，当 $\lambda=1$ 时，$A_1C\perp BD$. 所以当 $\lambda=1$ 时，$A_1C\perp$ 平面 C_1BD.

(2)[理科]过 C_1 作 $C_1H\perp$ 平面 $ABCD$，H 在 AC 上. 利用面积射影公式 $\cos\theta=\frac{S_{\triangle HBD}}{S_{\triangle C_1BD}}$ 可求得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解法略.

例 15　如图 8.179 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 且 $\angle DAB=60°$ 的菱形，侧面 PAD 为正三角形，且面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. 若点 E，F 分是为 BC，PC 上的动点，记 $\frac{BE}{EC}=\lambda_1$，$\frac{PF}{FC}=\lambda_2$，当 λ_1 与 λ_2 具有怎样的关系时会使得平面 $DEF\perp$ 平面 $ABCD$?

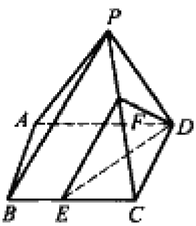


图 8.179

解　过点 P 作 $PG\perp AD$，则 $PG\perp$ 面 $ABCD$，联结 GB，则 $PG\perp BG$，$PG\perp AD$. 因为 $AG=1$，$AB=2$，$\angle DAB=60°$，所以 $|BG|=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos60°}=\sqrt{3}$，又因为 $AG^2+GB^2=AB^2$，所以 $\angle AGB=90°$. 以 G 为原点，以 $\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{GD}$，$\overrightarrow{GP}$ 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴的正方

向,建立空间直角坐标系如图 8.180 所示,则 $B(\sqrt{3},0,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$C(\sqrt{3},2,0)$,$D(0,1,0)$,$A(0,-1,0)$.又因为 $\frac{BE}{EC}=\lambda_1$,所以 $x_E=\sqrt{3}$,$y_E=\frac{0+\lambda_1\cdot 2}{1+\lambda_1}=\frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1}$,$z_E=0$,所以 $E\left(\sqrt{3},\frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1},0\right)$.同理 $F\left(\frac{\sqrt{3}\lambda_2}{1+\lambda_2},\frac{2\lambda_2}{1+\lambda_2},\frac{\sqrt{3}}{1+\lambda_2}\right)$.

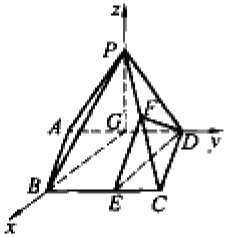


图 8.180

设面 EFD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,由 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DE}$,$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DF}$得

$$\begin{cases}\sqrt{3}x+\frac{\lambda_1-1}{1+\lambda_1}y=0\\ \frac{\sqrt{3}\lambda_2}{1+\lambda_2}x+\frac{\lambda_2-1}{1+\lambda_2}y+\frac{\sqrt{3}}{1+\lambda_2}z=0\end{cases}$$

令 $y=\sqrt{3}$,得 $x=\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}$,$z=-\frac{2\lambda_2-\lambda_1-1}{1+\lambda_1}$,所以

$$\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1},\sqrt{3},-\frac{2\lambda_2-\lambda_1-1}{1+\lambda_1}\right)$$

而面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$.因为平面 $DEF\perp$平面 $ABCD$,所以 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$,得 $-\frac{2\lambda_2-1-\lambda_1}{1+\lambda_1}=0$,则 $\lambda_1=2\lambda_2-1$.因此,当 $\lambda_1=2\lambda_2-1$ 时,平面 $DEF\perp$平面 $ABCD$.

例 16 如图 8.181,在四面体 $ABCD$ 中,$\angle BAC=\angle CAD=\frac{\pi}{4}$,$\angle BAD=\alpha(0<\alpha<90°)$,当 α 为多少度时,平面 $ABC\perp$平面 ACD?

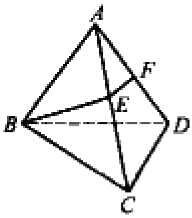


图 8.181

解 在平面 ABC 内作 $BE\perp AC$ 于 E,在平面 ACD 内作 $EF\perp AC$ 交 AD 于 E,则$\angle BEF$ 为二面角 $B-AC-D$ 的平面角,设 $AE=a$,则 $AB=AF=\sqrt{2}a$.

$$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF})=\overrightarrow{EA}^2+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=$$
$$a^2+a\cdot\sqrt{2}a\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}a\cdot a\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}a\cos\alpha=$$
$$-a^2+2a^2\cos\alpha$$

要使平面 $ABC\perp$平面 ACD,须$\angle BEF=90°$,即$\overrightarrow{EB}\perp\overrightarrow{EF}$,所以$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,即 $-a^2+2a^2\cos\alpha=0$,所以 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$,则 $\alpha=60°$.因此,当 α 为 60°时,平面 $ABC\perp$平面 ACD.

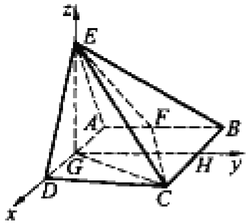


图 8.182

例 17　如图 8.182,平面 $EAD\perp$平面 $ABCD$,$\triangle ADE$ 是等边三角形,$ABCD$ 是矩形,F 是 AB 的中点,EC 与平面 $ABCD$ 成 $30°$的角,当 AD 的长是多少时,点 D 到平面 EFC 的距离为 2? 请说明理由.

解　过 E 作 $EG\perp AD$ 于 G.因为$\triangle ADE$ 是等边三角形,所以 $AG=DG$.因为平面 $EAD\perp$平面 $ABCD$,所以 $EG\perp$平面 $ABCD$,过 G 作 $GH/\!/AB$ 交 BC 于 H.因为 $ABCD$ 是矩形,所以 $GH\perp AD$.因为 G 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.182所示,设 $AD=2a$,则 $GE=\sqrt{3}a$,所以 $D(a,0,0)$,$E(0,0,\sqrt{3}a)$,联结 GC,则$\angle ECG$ 是 EC 与平面 $ABCD$ 所成的角,所以$\angle ECG=30°$,则 $CG=GE\cdot\cot 30°=3a$,$DC=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}a$,所以 $C(a,2\sqrt{2}a,0)$,$F(-a,\sqrt{2}a,0)$,$\overrightarrow{FE}=(a,-\sqrt{2}a,\sqrt{3}a)$,$\overrightarrow{FC}=(2a,\sqrt{2}a,0)$.设平面 EFC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{FE}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{FC}$得

$$\begin{cases}ax-\sqrt{2}ay+\sqrt{3}az=0\\2ax+\sqrt{2}ay=0\end{cases}$$

令 $y=\sqrt{2}$,得 $x=-1$,$z=\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{2},\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DC}=(0,2\sqrt{2}a,0)$,所以点 D到平面 EFC 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4a}{\sqrt{6}}$.由$\dfrac{4a}{\sqrt{6}}=2$,得 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,因此,当 AD 的长为$\sqrt{6}$时,点 D 到平面 EFC 的距离为 2.

4.对条件探索型问题有时也可从特殊情况出发来考虑结论成立所应满足的条件,如例 20.

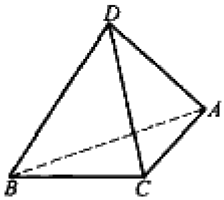


图 8.183

例 18　[2007·海南文三(18)]如图 8.183,A,B,C,D 为空间四点,在$\triangle ABC$ 中,$AB=2$,$AC=BC=\sqrt{2}$,等边$\triangle ADB$ 以 AB 为轴转动.

(1)当平面 $ADB\perp$平面 ABC 中,求 CD;

(2)当$\triangle ADB$ 转动时,是否总有 $AB\perp CD$? 证明你的结论.

解　(1)略.

(2)在旋转过程中,$\triangle ADC\cong\triangle BDC$,则$\angle ACD=\angle BCD$,又 $CB=CA$,所以$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}$.因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$,所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$,故总有 $AB\perp CD$.

例 19　如图 8.184,已知 $ABCD$ 是矩形,四个顶点在平面 α 上的射影分别为 A_1,B_1,C_1,D_1,直线 A_1B_1 与 C_1D_1 不重合.

(1)求证:$A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形;

(2)在怎样的条件下,$A_1B_1C_1D_1$ 也是矩形? 并证明你的结论.

证明 (1)略.

(2)如图 8.185,设 $AB=m$,$BC=n$,$AA_1=a$,$BB_1=b$,$CC_1=c$.不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,又设$\angle B_1BC=\gamma$,$\angle B_1BA=\beta$.则

$$\cos\gamma=\frac{b-c}{n},\cos\beta=-\frac{a-b}{m}=\frac{b-a}{m}$$

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1A_1}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=&(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1})\cdot(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})=\\&b^2+\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\\&\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}=\\&b^2-bn\cos\gamma-bc-mb\cos\beta+0+mc\cos\beta-ab+an\cos\gamma+ac=\\&(b^2-bc-ab+ac)+n(a-b)\cos\gamma+m(c-b)\cos\beta=\\&b(b-c)+a(c-b)+(a-b)(b-c)+(c-b)(b-a)=\\&(b-c)(b-a)-(b-a)(b-c)-(b-a)(b-1)=\\&-(b-a)(b-c)=0\end{aligned}$$

所以 $b=a$ 或 $b=c$,当 $a=b$ 时,A_1B_1BA 是矩形,所以 $AB /\!/ A_1B_1$,则 $AB /\!/ \alpha$;同理 $b=c$ 时,$BC /\!/ \alpha$,故当矩形的一边平行于平面 α 或在 α 内时,射影 $A_1B_1C_1D_1$ 是矩形.

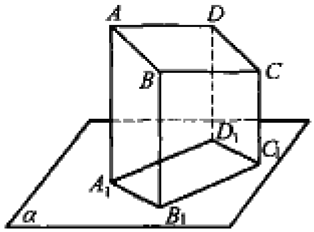


图 8.184

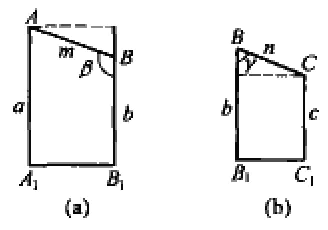


图 8.185

例 20 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F,G,H 分别是棱 CC_1,C_1D_1,D_1D,DC 的中点,N 是 BC 的中点,点 M 在四边形 $EFGH$ 及其内部运动,请你试添加一个条件使得满足 $MN\perp A_1G$.

解 如图 8.186,以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系.不妨设底面边长为 1,侧棱长为 a,则 $A_1(1,0,a)$,$G(0,0,\frac{a}{2})$,$N(\frac{1}{2},1,0)$,所以$\overrightarrow{A_1G}=(-1,0,-\frac{a}{2})$.

若取点 M 为点 F，则 $M(0,\frac{1}{2},a)$，$\overrightarrow{MN}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-a)$. 因为 $MN\perp A_1G$，所以 $\overrightarrow{A_1G}\cdot\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2=a$，则 $a=1$，所以可添加条件：正四棱柱为正方体，此时点 M 恰运动到点 F 位置.

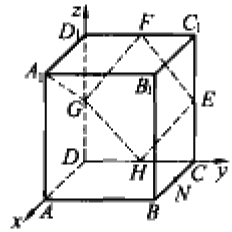


图 8.186

若取点 M 为 HF 的中点，则 $M(0,\frac{1}{2},\frac{a}{2})$，所以 $\overrightarrow{MN}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{a}{2})$. 因为 $MN\perp A_1G$，所以 $\overrightarrow{A_1G}\cdot\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}a^2=0$，$a=\sqrt{2}$. 可添加条件：当侧棱长与底面边长之比为 $\sqrt{2}$ 时，点 M 恰运动到 HF 的中点位置.

四、走进考场 19

1. [2007·山东文三(20)]如图 8.187，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$，$AD\perp DC$，$AB/\!/DC$.

(1)求证：$D_1C\perp AC_1$；

(2)设 E 是 DC 上一点，试确定 E 的位置，使 $D_1E/\!/$平面 A_1BD，并说明理由.

2. [2006·湖北理三(18)]如图 8.188，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是侧棱 CC_1 上的一点，$CP=m$.

(1)试确定 m，使得直线 AP 与平面 BDD_1B_1 所成角的正切值为 $3\sqrt{2}$；

(2)在线段 A_1C_1 上是否存在一个定点 Q，使得对任意的 m，D_1Q 在平面 APD_1 上的射影垂直于 AP，并证明你的结论.

3. [2005·江西文理三(20)]如图 8.189，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$，点 E 在棱 AB 上移动.

(1)证明：$D_1E\perp A_1D$；

(2)当 E 为 AB 的中点时，求点 E 到面 ACD_1 的距离；

(3)AE 等于何值时，二面角 D_1-EC-D 的大小为 $\frac{\pi}{4}$？

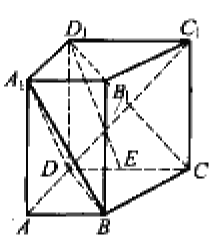


图 8.187

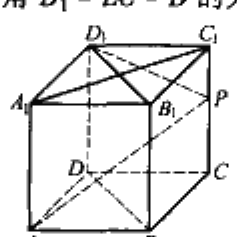


图 8.188

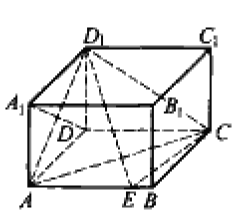


图 8.189

4.[2005·浙江文理三(18)]如图 8.190,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$AB\perp BC$,$AB=BC=kPA$[文科:$AB=BC=\frac{1}{2}PA$]点 O,D 分别是 AC,PC 的中点,$OP\perp$ 底面 ABC.

(1)求证:OD∥平面 PAB;

(2)[理科]当 $k=\frac{1}{2}$时,求直线 PA 与平面 PBC 所成角的大小;

[文科]求直线 OD 与平面 PBC 所成角的大小;

(3)[理科]当 k 取何值时,O 在平面 PBC 内的射影恰好为△PBC 的重心?

5.[2004·湖北理三(18)]如图 8.191,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E 是棱 BC 的中点,点 F 是棱 CD 上的动点,试确定点 F 的位置,使得 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F.

6.[1998·全国文理二(18)]如图 8.192,在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中,当底面四边形 $ABCD$ 满足条件________时,有 $A_1C\perp B_1D_1$(注:填上你认为正确的一种条件即可,不必考虑所有可能的情况).

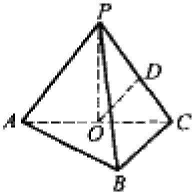


图 8.190

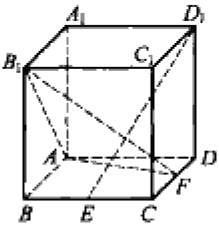


图 8.191

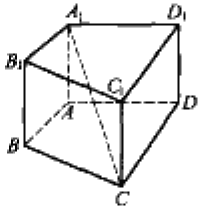


图 8.192

7.如图 7.193,在三棱锥 $S-ABC$ 中,△ABC 是边长为 4 的正三角形,平面 $SAC\perp$ 平面 ABC,$SA=SC=2\sqrt{3}$,M 是 AB 中点,试问:在线段 SB 上是否存在一点 N,使得二面角 $N-CM-B$ 的余弦值为$\frac{1}{3}$?

8.如图 8.194,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,底面是等腰直角三角形,$\angle ACB=90°$,侧棱 $AA_1=2$,$CA=2$,D 是 CC_1 的中点,试问 A_1B 上是否存在一点 E,使得点 A_1 到面 AED 的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$?

9.如图 8.195,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F,G,H 分别是棱 CC_1,C_1D_1,D_1D,CD 的中点,N 是 BC 的中点,点 M 在四边形 $EFGH$ 及其内部运动,则 M 满足条件________时,有 MN∥平面 B_1BDD_1?

10.如图 8.196,A 是正方体顶点,B 是底面中心,C 是棱 ON 的中点,MN 是对角线,试求正方体表面上满足 $PO\perp$ 平面 ABC 的动点 P 的轨迹.

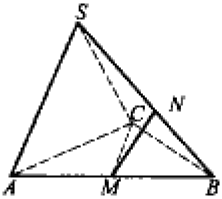


图 8.193

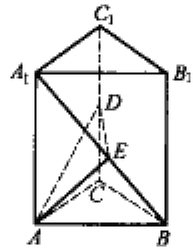


图 8.194

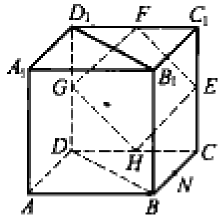


图 8.195

11. 如图 8.197，已知 $PA\perp$ 矩形 $ABCD$ 所在平面，M，N 分别是 AB，PC 的中点.

(1)求证：$MN\perp AB$；

(2)设平面 PDC 与平面 $ABCD$ 所成二面角为锐角 θ，能否确定 θ，使得 MN 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线？若能，求出 θ 的值，若不能，请说明理由.

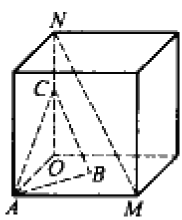


图 8.196

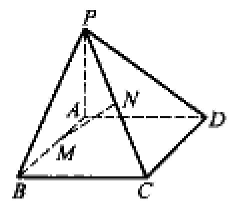


图 8.197

12. 已知正△ABC 的中线 AF 与中位线 DE 交于点 G(图 8.198(a))，将此三角形沿 DE 折成二面角 $A-DE-F$(图 8.198(b))，当二面角为多大时，异面直线 AE 与 BD 垂直？证明你的结论.

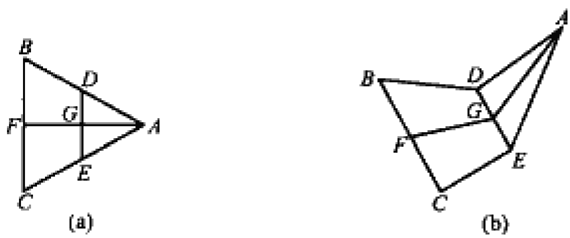


图 8.198

五、答案与提示

1. (2) E 是 DC 中点　提示：以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x 轴，

y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系，设 $AD=a$，$E(0,y,0)$，$\overrightarrow{D_1E}=(0,y,-2a)$．求出面 A_1BD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-2,-1)$．由 $\overrightarrow{D_1E}\perp\boldsymbol{n}$，求得 $y=a$

2．(1)$\frac{1}{3}$　(2)Q 为 A_1C_1 中点　提示：(1)以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系．$P(0,1,m)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,1,m)$．平面 BDD_1B_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$．由 $\tan\theta=3\sqrt{2}$，得 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$，解 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$，得 $m=\frac{1}{3}$　(2)设 $Q(x,y,1)$，易见 $x+y=1$，所以 $Q(x,1-x,1)$，$\overrightarrow{D_1Q}=(x,1-x,0)$．由题设知 $D_1Q\perp AP$．解 $\overrightarrow{D_1Q}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，得 $x=\frac{1}{2}$

3．(2)$\frac{1}{3}$　(3)$2-\sqrt{3}$　提示：以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系　(3)设 $AE=x$，平面 D_1EC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(2-x,1,2)$，平面 ECD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$．由 $\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$ 得 $\frac{2}{\sqrt{(x-2)^2+5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $x_1=2-\sqrt{3}$，$x_2=2+\sqrt{3}$(不合)

4．(3)$k=1$　提示：(3)$OP\perp OA$，$OP\perp OB$，以 O 为坐标原点，OA，OB，OP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，设 $AB=a$，$OP=h$，$\triangle PBC$ 的重心 $G\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}a,\frac{\sqrt{2}}{6}a,\frac{1}{3}h\right)$．由 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 得 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以 $PA=a$．反之，当 $k=1$ 时，$PB=PC=BC$，$OP=OB=OC$，所以三棱锥 $O-PBC$ 为正三棱锥

5．F 为 CD 中点　提示：以 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，设 $F(x,1,0)$，$\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$．由 $\overrightarrow{D_1E}\perp$ 平面 AB_1F 得 $D_1E\perp AF$

6．$AC\perp BD$ 或 $AB=AD$ 且 $\angle BAC=\angle DAC$ 等　提示：取基向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$．$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=(-\boldsymbol{k}+\overrightarrow{AC})\cdot(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i})=\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{j}-\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{i}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

7．$N(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 为 SB 的中点　提示：过 S 作 $SO\perp AC$ 于 O，则 $SO\perp$ 平面 ABC，$AO=OC$，$SO\perp OB$．以 O 为坐标原点，OA，OB，OS 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，则 $B(0,2\sqrt{3},0)$，$C(-2,0,0)$，$S(0,0,2\sqrt{2})$，$M(1,\sqrt{3},0)$．在 yOz 平面内，SB 的方程为 $\frac{y}{2\sqrt{3}}+\frac{z}{2\sqrt{2}}=1$，即 $z=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}y$，可设 $N(0,y,2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}y)$．平面 CMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}-3y}{\sqrt{2}y-2\sqrt{6}})$，$\overrightarrow{OS}$ 为平面 ABC

的法向量

8. E 为 A_1B 的中点　提示：以 C 为坐标原点，CA，CB，CC_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系．设 $E(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{A_1E}=(x-2,y,z-2)$，$\overrightarrow{A_1B}=(-2,2,-2)$，由 A_1，E，B 三点共线得 $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-2}$，所以 $x=2-y=z$，则 $E(2-y,y,2-y)$．平面 AED 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\frac{3y-4}{y},2)$，由 $\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 得 $y=1$

9. $M\in$ 线段 FH　提示：以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，并设正方体棱长为 1，$M(0,y,z)$．$\overrightarrow{MN}=(\frac{1}{2},1-y,-z)$，平面 B_1BDD_1 的一个法向量是 $\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$．由 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AC}$ 得 $y=\frac{1}{2}$

10. P 是上底面中心　提示：以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系，并设正方体棱长为 2，设 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OP}\perp AC$，得 $\begin{cases}-x+y=0\\-2x+z=0\end{cases}$，解得 $z=2x$，$y=x$，所以 $P(x,x,2x)$．当点 P 在左、下、后表面时，得 $P(0,0,0)$（不合）；当 P 在右、前表面时，得 $P(2,2,4)$（不合）；只有当 P 在上表面时得 $P(1,1,2)$ 为上底面中心

11. (2) $\theta=\frac{\pi}{4}$　提示：以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系，并设 $AD=2a$，$AB=2b$，$\angle PDA=Q$，$P(0,0,2a\tan\theta)$，若 $MN\perp PC$，得 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PC}=2a^2-2a^2\tan^2\theta=0$，$\tan\theta=1$

12. $\pi-\arccos\frac{1}{3}$　提示：$\angle AGF$ 即二面角 $A-DE-F$ 的平面角，设为 θ．设正△ABC 的边长为 4，则 $GD=GE=1$，$GA=GF=\sqrt{3}$，$AE=BD=2$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{GA})\cdot(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GD})=(\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{EA})\cdot(2\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{GF}-\overrightarrow{GE})=1+3\cos\theta$

第五节　向量法解立体几何中的求参数取值范围、最值、判断型等问题

一、高考内容

1. 空间中点、线、面间的位置关系
2. 空间中各种角
3. 空间中各种距离

二、高考要求(理科)

了解向量方法在研究立体几何问题中的应用.

三、解法指导

立体几何中凡牵涉到空间各种角、各种距离的求参数取值范围、最值的问题以及判断空间点、线、面位置关系的问题可考虑用向量方法来处理.

(一)求参数取值范围的方法

1. 函数法:构造要求取值范围变量的函数解析式,利用函数单调性求出参数的取值范围,或利用基本不等式或利用函数求最值的方法(如二次函数极值)求出最值,从而得出值域,如例1、例3、例4.

2. 不等式法:利用题目中几何元素所满足的条件建立不等式,解不等式求出参数的取值范围,如例2.

例1 [2007·湖北理三(18)]在三棱锥 $V-ABC$ 中,$VC\perp$底面 ABC,$AC\perp BC$,D 是 AB 的中点,且 $AC=BC=a$,$\angle VDC=\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$.

(1)求证:平面 $VAB\perp$平面 VCD;

(2)当角 θ 变化时,求直线 BC 与平面 VAB 所成的角的取值范围.

解 以 C 为坐标原点建立空间直角坐标系如图8.199,则 $A(a,0,0)$,$B(0,a,0)$,$D(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$.因为 $CD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,所以 $V(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta)$.

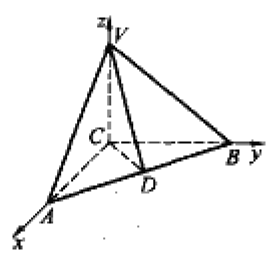


图 8.199

(1)略.

(2)设 BC 与平面 VAB 所成的角为 φ,平面 VAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.$\overrightarrow{VA}=(a,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta)$,$\overrightarrow{AB}=(-a,a,0)$,由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{VA}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$得$\begin{cases}ax-\frac{\sqrt{2}}{2}az\tan\theta=0\\-ax+ay=0\end{cases}$,取 $z=\sqrt{2}$得 $x=y=\tan\theta$,所以 $\boldsymbol{n}=(\tan\theta,\tan\theta,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{BC}=(0,a,0)$,则 $\sin\varphi=\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{BC}>=\frac{a\tan\theta}{\sqrt{2(\tan^2\theta+1)}\cdot a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$.因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\sin\theta<1$,则 $0<\sin\varphi<\frac{\sqrt{2}}{2}$,

又$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$0<\varphi<\frac{\pi}{4}$，即直线 BC 与平面 VAB 所成角的取值范围是$(0,\frac{\pi}{4})$.

例 2　[2006·重庆理三(19)]如图 8.200，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$\angle DAB$ 为直角，$AB\parallel CD$，$AD=CD=2AB$，E，F 分别为 PC，CD 的中点.

(1)试证：$CD\perp$平面 BEF.

(2)设 $PA=k\cdot AB$，且二面角 $E-BD-C$ 的平面角大于 $30°$，求 k 的取值范围.

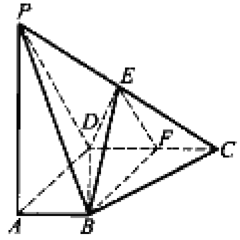


图 8.200

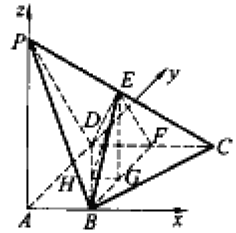


图 8.201

解　(1)以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.201 所示. 设 $AB=a$，则 $A(0,0,0)$，$B(a,0,0)$，$C(2a,2a,0)$，$D(0,2a,0)$，$F(a,2a,0)$.

(1)略.

(2)设 E 在平面 $ABCD$ 上的投影为 G，过 G 作 $GH\perp BD$ 于 H，联结 EH，则 $EH\perp BD$. 从而$\angle EHG$ 为二面角 $E-BD-C$ 的平面角，由 $PA=kAB$ 得 $P(0,0,ka)$，$E(a,a,\frac{ka}{2})$，$G(a,a,0)$. 设 $H(x,y,0)$，则$\overrightarrow{GH}=(x-a,y-a,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-a,2a,0)$. 由$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{BD}$得$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，即

$$-a(x-a)+2a(y-a)=0$$

所以

$$x-2y=-a \quad ①$$

又因$\overrightarrow{BH}=(x-a,y,0)$，且$\overrightarrow{BH}$与$\overrightarrow{BD}$的方向相同，故$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{2a}$，即

$$2x+y=2a \quad ②$$

由①，②解得 $x=\frac{3}{5}a$，$y=\frac{4}{5}a$. 从而

$$\overrightarrow{GH}=(-\frac{2}{5}a,-\frac{1}{5}a,0)，|\overrightarrow{GH}|=\frac{\sqrt{5}}{5}a$$

$$\tan\angle EHG=\frac{|\overrightarrow{EG}|}{|\overrightarrow{GH}|}=\frac{\frac{ka}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{2}k$$

由 $k>0$ 知$\angle EHG$ 是锐角，由 $EHG>30°$得 $\tan\angle EHG>\tan 30°$，即$\frac{\sqrt{5}}{2}k>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $k>\frac{2\sqrt{15}}{15}$. 因此 k 的取值范围为$\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},+\infty\right)$.

例 3 在直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，$AB=AC=AA_1=1$，已知 G 与 E 分别为 A_1B_1 和 CC_1 的中点，D 与 F 分别为线段 AC 和 AB 上的动点(不包括端点)，若 $GD\perp EF$，则线段 DF 的长度的取值范围为 ( )

A. $[\frac{1}{\sqrt{5}},1)$　　B. $[\frac{1}{5},2)$　　C. $[1,\sqrt{2})$　　D. $[\frac{1}{\sqrt{5}},\sqrt{2})$

解 以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.202，设 $AF=t_1$，则 $F(t_1,0,0)(0<t_1<1)$，$E(0,1,\frac{1}{2})$，$G(\frac{1}{2},0,1)$，设 $AD=t_2$，则 $D(0,t_2,0)(0<t_2<1)$. $\overrightarrow{GD}=(-\frac{1}{2},t_2,1)$，$\overrightarrow{EF}=(t_1,-1,-\frac{1}{2})$. 因为 $GD\perp EF$，所以 $\overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，则

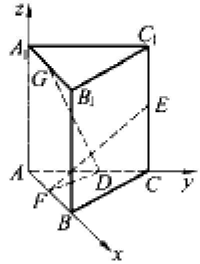


图 8.202

$$-\frac{1}{2}t_1-t_2+\frac{1}{2}=0$$

即
$$t_1+2t_2=1,t_2=\frac{1-t_1}{2}<\frac{1}{2}$$

又
$$\overrightarrow{DF}=(t_1,-t_2,0)$$

$$|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{t_1^2+t_2^2}=\sqrt{(1-2t_2)^2+t_2^2}=\sqrt{5t_2^2-4t_2+1}=\sqrt{5(t_2-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}}$$

当 $t_2=\frac{2}{5}\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$|\overrightarrow{DF}|$ 取最小值$\frac{\sqrt{5}}{5}$. 因为 $0<t_2<\frac{1}{2}$，所以 $|\overrightarrow{DF}|<1$，即 $\frac{\sqrt{5}}{5}\leqslant|\overrightarrow{DF}|<1$，应选 A.

例 4 如图 8.203(a)，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，沿斜边上的高 CD 折成直二角 $A-CD-B$ 后，图 8.203(b)，两直角边的夹角是 θ，求 θ 的取值范围.

解 在 Rt△ABC 中，设$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边为 a，b，c，则 $a^2+b^2=c^2$，$AD=\frac{b^2}{c}$，$BD=\frac{a^2}{c}$，$CD=\frac{ab}{c}$，因为 $CD\perp AD$，$CD\perp BD$，且二面角 $A-CD-B$ 为直二面角，所以$\angle ADB=90°$. 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.203(b)所示，则 $A(\frac{b^2}{c},0,0)$，$B(0,\frac{a^2}{c},0)$，$C(0,0,\frac{ab}{c})$，$\overrightarrow{CA}=(\frac{b^2}{c},0,-\frac{ab}{c})$，$\overrightarrow{CB}=(0,\frac{a^2}{c},-\frac{ab}{c})$，

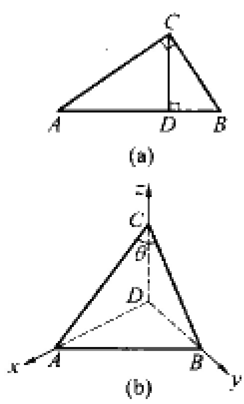


图 8.203

$\cos<\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>=\dfrac{a^2b^2}{\dfrac{c^2}{ab}}=\dfrac{ab}{c^2}\leqslant\dfrac{\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)}{c^2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $0<\cos\theta\leqslant\dfrac{1}{2}$. 因为 $\theta\in$ $(0,\pi)$ 且 $\cos\theta$ 为减函数，所以 θ 的取值范围是 $[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$.

(二)求最值的方法——函数法

建立所求变量关于某参数(选作自变量)的函数解析式，利用求函数最值的方法(如二次函数极值，三角函数极值)或利用基本不等式(要注意等号成立的条件)来求解，如例 5～7.

例 5　[2007·北京理三(16)、文三(17)]在 Rt△AOB 中，$\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$，斜边 $AB=4$，Rt△AOC 可以通过 Rt△AOB 以直线 AO 为轴旋转得到，且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角，动点 D 在斜边 AB 上.

(1)求证：平面 $COD\perp$平面 AOB；

(2)当 D 为 AB 的中点时，求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小；

(3)求 CD 与平面 AOB 所成角的最大值.

解　以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.204所示，由 $AB=4$，$\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$，得 $OB=2$，$OA=2\sqrt{3}$，$OC=OB=2$，所以 $C(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$A(0,0,2\sqrt{3})$.

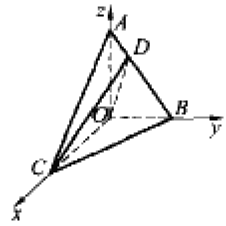


图 8.204

(1)略.　(2)略.

(3)在 yOz 平面上，方程 AB 为 $\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2\sqrt{3}}=1$，所以 $z=\sqrt{3}(2-y)$，设 $D(0,y_0,\sqrt{3}(2-y_0))(0<y_0<2)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,y_0,\sqrt{3}(2-y_0))$. 平面 AOB 的法向量为$\overrightarrow{OC}=(2,0,0)$. 设 CD 与平面 AOB 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{CD},\overrightarrow{OC}>|=\frac{4}{|\overrightarrow{CD}|\times 2}=\frac{2}{|\overrightarrow{CD}|}$$

而

$$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{4+y_0^2+3(2-y_0)^2}=2\sqrt{y_0^2-3y_0+4}=2\sqrt{(y_0-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

当 $y_0=\dfrac{3}{2}\in(0,2)$ 时，$|\overrightarrow{CD}|$ 有最小值 $\sqrt{7}$. 这时 $\sin\theta$ 有最大值 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，θ 有最大值 $\arcsin\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

例 6 如图 8.205(a)，在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 中，M，N 分别为 DA，BC 上的点，且 $MN\parallel AB$，联结 AC 交 MN 于点 P，现沿 MN 将正方形 $ABCD$ 折成直二面角.

(1)求证：不论 MN 怎样平行移动(保持 $MN\parallel AB$)，$\angle APC$ 的大小不变；

(2)当 MN 在怎样的位置时，点 M 到面 ACD 的距离最大?

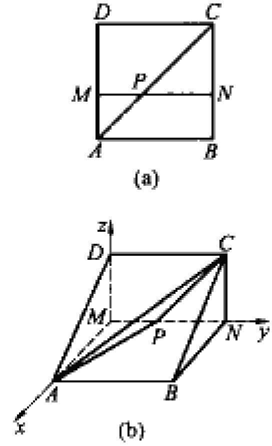


图 8.205

解 以 M 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.205(b)所示，设 $AM=c(0<c<a)$，则 $DM=a-c$，$A(c,0,0)$，$P(0,c,0)$，$D(0,0,a-c)$，$C(0,a,a-c)$.

(1)$\overrightarrow{PA}=(c,-c,0)$，$\overrightarrow{PC}=(0,a-c,a-c)$，所以 $\cos\angle APC=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|}=\dfrac{c^2-ac}{\sqrt{2}c\cdot\sqrt{2}(a-c)}=-\dfrac{1}{2}$，所以$\angle APC$ 为定值 $120°$.

(2)$\overrightarrow{AD}=(-c,0,a-c)$，$\overrightarrow{DC}=(0,a,0)$，设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AD}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DC}$得$\begin{cases}-cx+(a-c)z=0\\ay=0\end{cases}$，令 $z=1$，得 $x=a-c$，$y=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(\dfrac{a-c}{c},0,1)$，又$\overrightarrow{MA}=(c,0,0)$，所以点 M 到面 ACD 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{MA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{a-c}{\dfrac{\sqrt{(a-c)^2+c^2}}{c}}=\frac{(a-c)c}{\sqrt{(a-c)^2+c^2}}\leqslant$$

$$\frac{(a-c)c}{\sqrt{2(a-c)c}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(a-c)c}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}(a-c+c)=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$

上式当且仅当 $a-c=c$，即 $c=\dfrac{a}{2}$时取等号.因此，当 M，N 分别为 DA，BC 的中点时，点 M 到面 ACD 的距离最大.

例 7 如图 8.206(a)，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$BC=a$，$AC=b$，D 是斜边 AB 上的点，以 CD 为棱把它折成直二面角$A-CD-B'$后，D 在怎样的位置 AB' 最小? 最小值是多少?

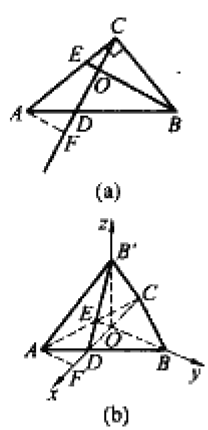


图 8.206

解 过 B 作 $BO\perp CD$ 于 O，因为$A-CD-B'$是直二面角，所以面 $B'CD\perp$面 ABC，则 $B'O\perp$面 ABC，以 O 为坐标原点，OD，OB，OB' 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系如图 8.206(b)所示.过 A 作 $AF\perp CD$ 交 CD 于 F，设$\angle ACD=\theta(0<\theta<90°)$，则 $AF=b\sin\theta$，$CF=b\cos\theta$.因

为$\angle CBO = 90° - \angle CEO = \angle ECO = \theta$，所以 $BO = a\cos\theta$，$CO = a\sin\theta$，则$OF = CF - CO = b\cos\theta - a\sin\theta$. 所以 $A(b\cos\theta - a\sin\theta, -b\sin\theta, 0)$. 因为$OB' = OB = a\cos\theta$，所以 $B'(0,0,a\cos\theta)$，则$\overrightarrow{AB'} = (a\sin\theta - b\cos\theta, b\sin\theta, a\cos\theta)$，且

$$|\overrightarrow{AB'}| = \sqrt{(a\sin\theta - b\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta} = \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sin 2\theta}$$

当 $\sin 2\theta = 1$，即 $\theta = 45°$时 AB' 有最小值$\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. 此时 D 为$\angle ACB$ 的平分线与 AB 的交点.

***(三)函数最值法求空间距离**

1.求两异面直线的距离：在两异面直线上分别任取一点 P，Q，选定参数后，建立$|\overrightarrow{PQ}|$的函数关系式，再求其最小值即为两异面直线间的距离.

2.求点 P 到平面 α 的距离：在平面 α 内任取一点 Q，选定参数后建立$|\overrightarrow{PQ}|$的函数关系式，再求其最小值即为点 P 到平面 α 的距离.

注意 建立了所求距离$|\overrightarrow{PQ}|$的函数关系式后，用向量法求其最值的方法步骤如下：(1)构造空间向量 $\boldsymbol{u}$(含参数)，使其模为$|\overrightarrow{PQ}|$，另外构造空间向量$\boldsymbol{v}$(其坐标为常数，也可用待定系数法来求)，使 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 为常数；(2)利用向量数量积的性质：$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leqslant |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$得出$|\overrightarrow{PQ}|$的一个不等式，从而得出$|\overrightarrow{PQ}|$的最小值；(3)验证等号成立的条件：$\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 共线是否会成立.

例 8 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，求异面直线 A_1B 与 D_1B_1 的距离.

解 以 D_1 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.207 所示，在 A_1B 与 D_1B_1 上分别任取一点 P 和 Q. 并设$P(a,z,z)$，$Q(x,x,0)$，其中 $x, z \in [0,a]$，则$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(a-x)^2 + (z-x)^2 + z^2}$，设 $\boldsymbol{u} = (a-x, z-x, z)$，$\boldsymbol{v} = (1,-1,1)$，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = a$，$|\boldsymbol{u}| = |\overrightarrow{PQ}|$，$\boldsymbol{v} = \sqrt{3}$. 由$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leqslant |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$知 $a \leqslant \sqrt{3}|\overrightarrow{PQ}|$，所以$|\overrightarrow{PQ}| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}a$，当且仅当 $\boldsymbol{u} /\!/ \boldsymbol{v}$，即$\frac{a-x}{1} = \frac{z-x}{-1} = \frac{z}{1}$，亦即 $x = \frac{2}{3}a$，$z = \frac{1}{3}$时，$|\overrightarrow{PQ}|_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. 因此异面直线 A_1B 与 D_1B_1 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

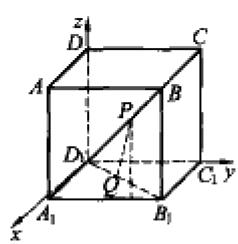


图 8.207

例 9 点 P 为矩形$ABCD$ 所在平面外一点，且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，点 Q 为线段 AP 的中点，若 $AB = 1$，$BC = 2$，$PA = 2$，求点 P 到平面 BQD 的距离.

解 以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.208 所示，由 $AB = 1$，

$BC=2,PA=2$ 得 $P(0,0,2),B(1,0,0),D(0,2,0)$，$Q(0,0,1)$，则$\overrightarrow{QB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{QD}=(0,2,-1)$. 设点 M 为平面 BQD 内的一动点，则$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QB}+\mu\overrightarrow{QD}=(\lambda,2\mu,-\lambda-\mu)(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$. 于是动点 $M(\lambda,2\mu,1-\lambda-\mu)$，则 $|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{\lambda^2+(2\mu)^2+(1+\lambda+\mu)^2}$，设 $\boldsymbol{u}=(\lambda,2\mu,1+\lambda+\mu)$，$\boldsymbol{v}=(2,1,-2)$，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=2$，$|\boldsymbol{u}|=|\overrightarrow{PM}|$，$|\boldsymbol{v}|=3$，由 $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ 知 $2\leqslant3|\overrightarrow{PM}|$，

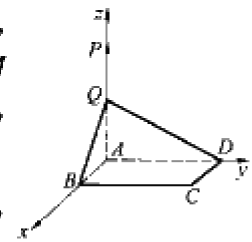


图 8.208

$|\overrightarrow{PM}|\leqslant\frac{2}{3}$. 上式当且仅当 $\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{v}$，即$\frac{\lambda}{2}=\frac{2\mu}{1}=\frac{1+\lambda+\mu}{-2}$，亦即 $\lambda=-\frac{4}{9}$，$\mu=-\frac{1}{9}$时取等号，此时$|PM|_{\min}=\frac{2}{3}$，故点 P 到平面 BQD 的距离为$\frac{2}{3}$.

（四）判断型问题

例 10 ［2008·湖北文、理三(18)］在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1BC\perp$侧面 A_1ABB_1.

(1)求证：$AB\perp BC$；

(2)［理科］若直线 AC 与平面A_1BC 所成的角为θ，二面角 A_1-BC-A 的大小为φ，试判断 θ 与 φ 的大小关系，并予以证明.

［文科］若 $AA_1=AC=a$，直线 AC 与平面A_1BC 所成的角为θ，二面角 A_1-BC-A 的大小为φ，求证：$\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$.

解 (1)略.

(2)由(1)，以 B 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.209 所示，设 $BC=a,AB=c,AA_1=b$，则 $A(0,c,0)$，$C(a,0,0)$，$A_1(0,c,b)$，于是$\overrightarrow{BC}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{BA_1}=(0,c,b)$. 设平面 A_1BC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BA_1}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BC}$得$\begin{cases}cy+bz=0\\ax=0\end{cases}$，取 $y=-b$，得 $x=0$，$z=c$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,-b,c)$，$\overrightarrow{AC}=(a,-c,0)$.

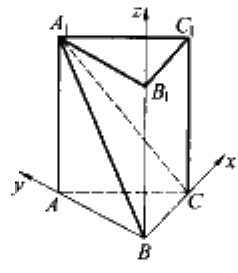


图 8.209

$$\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}>|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}$$

由 $A_1A\perp$平面 ABC，$AB\perp BC$ 知$A_1B\perp BC$，所以$\angle A_1BA$ 为二面角A_1-BC-A 的平面角，即$\angle A_1BA=\varphi$，从而

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA_1}||\overrightarrow{BA}|}=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

所以 $\sin\varphi=\frac{ab}{\sqrt{b^2+c^2}}$. 因为 $\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}<1$，所以 $\frac{cb}{\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}}<\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$，即 $\sin\theta<\sin\varphi$. 又 $0<\theta,\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\theta<\varphi$.

例 11　[2003·北京文三(17)]正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 是 BC 中点，$AB=a$.

(1)求证：$A_1D\perp B_1C_1$；

(2)求点 D 到平面 ACC_1 的距离；

(3)判断 A_1B 与平面 ADC_1 的位置关系，并证明你的结论.

解　因为 D 是 BC 中点，$\triangle ABC$ 是正三角形，所以 $AD\perp BC$，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系如图8.210所示，$C_1C\,/\!/\,z$ 轴. 设 $AA_1=c$，则 $A(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$，$A_1(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,c)$，$B(0,\frac{a}{2},0)$，$C_1(0,-\frac{a}{2},c)$.

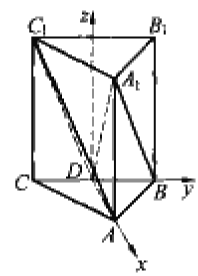


图 8.210

(1)略.　(2)略.

(3)设平面 ADC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{DA}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,-\frac{a}{2},c)$，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DA}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DC_1}$ 得

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}ax=0\\-\frac{a}{2}y+cz=0\end{cases}$$

，令 $y=2c$，得 $x=0,z=a$. 所以 $\boldsymbol{n}=(0,2c,a)$，又 $\overrightarrow{A_1B}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},-c)$. 因为 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{n}=0$，所以 $\overrightarrow{A_1B}\perp\boldsymbol{n}$，又 $A_1B\not\subset$ 平面 ADC_1，所以 $A_1B\,/\!/$ 平面 ADC_1，因此 A_1B 与平面 ADC_1 平行.

例 12　正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，在棱 BB_1 上有一动点 E.

(1)若截面 $A_1EC\perp$ 侧面 AC_1，求动点 E 的位置；其逆命题是否成立？

(2)在(1)问的前提下，若 $AA_1=A_1B_1$，求平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的锐二面角度数；

(3)在(1)问的前提下，是否存在平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的锐二面角为 30°这种情况？若存在，须追加什么条件？若不存在，说明理由；

(4)若规定平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成锐二面角为 60°时，称此正三棱柱为“黄金棱柱”，试问此三棱柱能否成为“黄金棱柱”？能否将问题(3)的结论加以推广？

解　以 A_1C_1 的中点 O 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.211 所

示.设 $A_1B_1=a$, $A_1A=b$, $B_1E=h$,则 $A_1(0,-\frac{a}{2},0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$, $C_1(0,\frac{a}{2},0)$, $E(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,h)$, $C(0,\frac{a}{2},b)$.

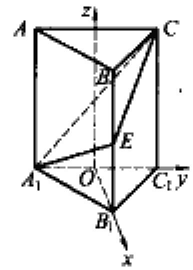


图 8.211

(1)设截面 A_1EC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{A_1E}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},h)$, $\overrightarrow{A_1C}=(0,a,b)$,由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{A_1E}$, $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{A_1C}$ 得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}ax+\frac{a}{2}y+hz=0\\ay+bz=0\end{cases}$,令 $y=-b$,得 $z=a$, $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}(-b+2h)$,所以 $\boldsymbol{n}=(\frac{\sqrt{3}}{3}(b-2h),-b,a)$,侧面 AC_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{OB_1}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$.因为截面 $A_1E\perp$侧面 AC_1,所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OB_1}$,则 $\frac{1}{2}a(b-2h)=0$, $h=\frac{b}{2}$,即 E 为 BB_1 的中点,由以上求解过程可知:当 E 为 BB_1 中点时,有截面 $A_1E\perp$侧面 AC_1,即其逆命题成立.

(2)45°,解法略.

(3)平面 A_1EC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,-b,a)$,平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{B_1E}=(0,0,\frac{b}{2})$,从而有

$$\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{B_1E}>=\frac{\frac{ab}{2}}{\sqrt{a^2+b^2}\times\frac{b}{2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以 $\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{3}{4}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,即须追加条件: $A_1A=\frac{\sqrt{3}}{3}A_1B_1$.

(4) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $b=\sqrt{3}a$,即此三棱柱能成为"黄金棱柱".

由上可见:可将问题(3)的结论推广到平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的锐二面角为任一锐角的情形.

*例 13 [莫斯科大学数学系入学试题]如图 8.212,已知三棱锥 $A-BCD$ 的一个截面 $PQRS$ 四个顶点的位置关系是 $AP=2PB$, $BQ=3QC$, $CR=RD$,试确定点 S 的位置.

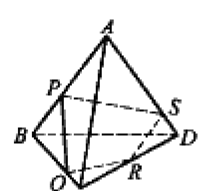


图 8.212

解 设 $\overrightarrow{DS}=m\overrightarrow{SA}$,则由 $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DS}$ 得

$$(1+m)\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$

因为

$$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}=\frac{4}{3}(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB})=\frac{4}{3}\overrightarrow{AQ}-2\overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CR}=2(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AR})=2(-\frac{4}{3}\overrightarrow{AQ}+2\overrightarrow{AP}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})=$$

$$-\frac{8}{3}\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AR}$$

所以
$$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{m+1}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AQ}+2\overrightarrow{AR})$$

由于 S,P,Q,R 共面，所以$\frac{1}{1+m}(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+2)=1$，$m=\frac{1}{6}$，所以$\overrightarrow{DS}=\frac{1}{6}\overrightarrow{SA}$，即 $AS=6SD$.

（五）求多面体体积、侧面积、几条线段长之间的关系等问题可用向量法求解

例 14　如图 8.213，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AB=4$，$AD=2$，B_1 在底面 $ABCD$ 上的射影为矩形 $ABCD$ 的中心 O，直线 $A_1D\perp$ 直线 OC_1，求四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.

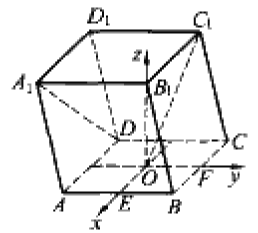


图 8.213

解　取 O 为坐标原点建立空间直角坐标系如图 8.213所示，E，F 分别为 AB，BC 的中点，则 $A(1,-2,0)$，$B(1,2,0)$，$C(-1,2,0)$，$D(-1,-2,0)$. 设 $A_1(x_1,y_1,z_1)$，$C_1(x_2,y_2,z_2)$，$OB_1=h$，则 $B_1(0,0,h)$，$\overrightarrow{AA_1}=(x_1-1,y_1+2,z_1)$，$\overrightarrow{BB_1}=(-1,-2,h)=\overrightarrow{AA_1}$，所以 $x_1-1=-1$，$y_1+2=-2$，$z_1=h$，则 $x_1=0$，$y_1=-4$，$z_1=h$，又$\overrightarrow{CC_1}=(x_2+1,y_2-2,z_2)=\overrightarrow{BB_1}$，所以 $x_2+1=-1$，$y_2-2=-2$，$z_2=h$，则 $x_2=-2$，$y_2=0$，$z_2=h$，所以 $A_1(0,-4,h)$，$C_1(-2,0,h)$. 因为 $\overrightarrow{A_1D}=(-1,2,-h)$，$\overrightarrow{OC_1}=(-2,0,h)$，$A_1D\perp OC_1$，所以 $2+0-h_2=0$，$h=\sqrt{2}$，则 $\triangledown_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}\cdot h=2\times4\times\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

例 15　如图 8.214，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是边长为 6 的正三角形，侧棱长为 5，若 A_1 在底面上的射影 O 为$\triangle ABC$ 的中心，求此三棱柱的侧面积.

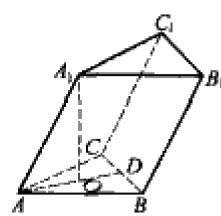


图 8.214

解　取基向量$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=30\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=30\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=18$. 由 O 为$\triangle ABC$ 的中心得

$$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

所以
$$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$$

因为 $OA_1\perp$平面 ABC，所以$\begin{cases}\overrightarrow{OA_1}\perp\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{OA_1}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$，即

$$\begin{cases}(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0\\ (3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=0\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=18\\ \cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

所以

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

即 $BC\perp BB_1$，因此三棱柱的侧面积为 $6\times5+6\times5\times\dfrac{4}{5}\times2=78$.

例 16 [1996·全国理二(22)]在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$E\in BB_1$，截面 $A_1EC\perp$侧面 AC_1. 求证：$BE=EB_1$.

证明 以 A_1 为坐标原点，建立空间直角坐标系如图 8.215 所示. 设正$\triangle A_1B_1C_1$ 的边长为 a，$B_1B=b$，则 $B_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{a}{2},0\right)$，$C(0,a,b)$. 设 $EB_1=c$，则 $E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{a}{2},c\right)$，$\overrightarrow{A_1E}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{a}{2},c\right)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,a,b)$. 设平面 A_1EC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{A_1E}\perp\boldsymbol{n}_1$，$\overrightarrow{A_1C}\perp\boldsymbol{n}_1$ 得

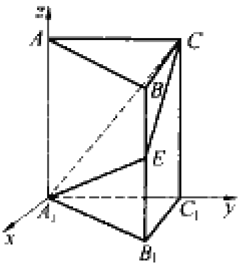


图 8.215

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}ax+\dfrac{a}{2}y+cz=0\\ ay+bz=0\end{cases}$$

令 $y=b$，得 $z=-a$，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(-b+2c)$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(-b+2c),b,-a)$. 平面 AC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$. 因为截面 $A_1EC\perp$侧面 AC_1，所以 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，则 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-b+2c)=0$，$c=\dfrac{b}{2}$. 即 $EB_1=\dfrac{b}{2}$，则 $BE=b-\dfrac{b}{2}=\dfrac{b}{2}=EB_1$.

***例 17** 如图 8.216，已知正方体 AC_1，棱长为 a，P 为 CC_1 的中点，Q 为正方形 ABB_1A_1 的中心，一条两端点分别在直线 AD 和 A_1B_1 上的线段 MN 与直线 PQ 垂直相交，求该线段的长.

解 取基向量 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$，且 $|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}|=a$，又设 $\overrightarrow{AM}=x\boldsymbol{i}$，

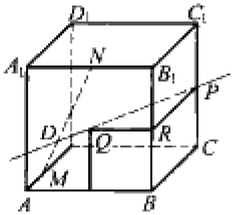


图 8.216

$\overrightarrow{A_1N}=y\boldsymbol{j}$，所以

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1N}=-x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

因为$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{QP}=0$，且$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}=\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$（$R$为$BB_1$的中点），所以

$$-x+\frac{1}{2}y=0,y=2x \qquad ①$$

因为MN与PQ相交等价于要求M,N,P,Q四点共面，即存在λ,μ，使

$$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{QP}+\mu\overrightarrow{QM}$$

而

$$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AM}=x\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$$

E为AB中点，所以

$$-x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=(\lambda+\mu x)\boldsymbol{i}+\frac{\lambda-\mu}{2}\boldsymbol{j}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{k}$$

由向量分解的唯一性知$\begin{cases}-x=\lambda+\mu x\\ y=\dfrac{\lambda-\mu}{2}\\ 1=-\dfrac{\mu}{2}\end{cases}$，所以

$$y=\frac{x+2}{2} \qquad ②$$

由①，②得$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=\dfrac{4}{3}\end{cases}$，所以

$$\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{4}{3}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

则

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{16}{9}+1}\cdot a=\frac{\sqrt{29}}{3}a$$

四、走进考场 20

1.［2008·江苏文、理三(22)］如图8.127，设动点P在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线BD_1上，记$\frac{D_1P}{D_1B}=\lambda$，当$\angle APC$为钝角时，求$\lambda$的取值范围.

2.［2002·全国、广东文三(19)］如图8.128，四棱锥$P-ABCD$的底面是边长为a的正方形，$PB\perp$面$ABCD$.

(1)若面PAD与面$ABCD$所成的二面角为$60°$，求这个四棱锥的体积；

(2)证明:无论四棱锥的高怎样变化,面 APD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 $90°$.

3.如图 8.219,$PA\perp$平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 是矩形,$PA=PD=a$,M,N 分别是 AB,PC 的中点.

(1)求平面 PCD 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小;

(2)求证:$MN\perp$平面 PCD;

(3)当 AB 的长度变化时,求异面直线 PC 与 AD 所成角的取值范围.

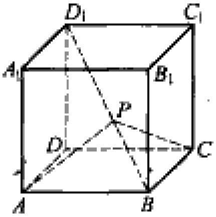


图 8.217

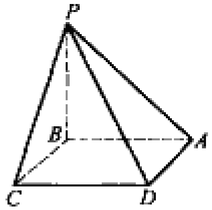


图 8.218

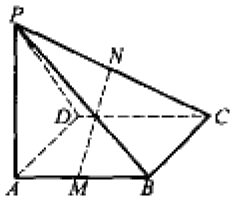


图 8.219

4.如图 8.220,平面 α 内有一个正$\triangle A'BC$,边长为 a,直线 $DE/\!/BC$ 且分别交 $A'B,A'C$ 于 D,E,沿 D,E 将$\triangle A'DE$ 折起与平面 α 垂直至 ADE 位置,求 AB 的最小值及取得最小值时 DE 的位置.

5.如图 8.221,已知在平行六面体 $OADB-CEFG$ 中,若对角线 AG 与平面 OED 交于点 H,联结 OH 交 ED 于 K,求证:$AH=\frac{1}{3}AG$, $OH=\frac{2}{3}OK$, $DK=\frac{1}{2}DE$.

*6.平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 A_1B_1 上有点 M,B_1C_1 上有点 N,BB_1 上有点 K,对角线 B_1D 与平面 MNK 交于点 P,已知$\frac{A_1M}{MB_1}=\frac{1}{3}$,$\frac{B_1N}{NC_1}=1$,$\frac{BK}{KB_1}=\frac{2}{5}$,求$\frac{B_1P}{PD}$的值.

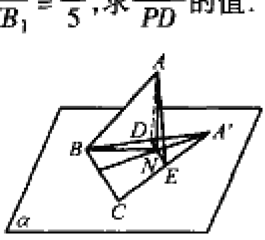


图 8.220

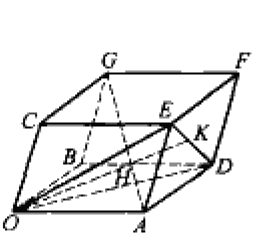


图 8.221

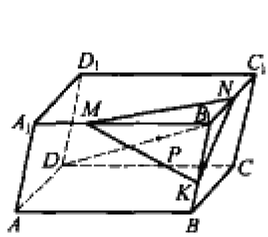


图 8.222

五、答案与提示

1. $(\frac{1}{3},1)$　提示：以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}=(\lambda,\lambda,-\lambda)$，$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{D_1A}=(1-\lambda,-\lambda,\lambda-1)$，$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{D_1C}=(-\lambda,1-\lambda,\lambda-1)$，$\angle APC$ 为钝角$\Leftrightarrow\cos<\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}><0$

2. (1)$\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$　提示：(1)$\angle PAB=60°$　(2)以 B 为坐标原点建立空间直角坐标系，设 $PB=h$，求出两个半平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，记 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2><0$

3. (1)45°　(2)$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$　提示：以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系. (3)设 $AB=x(x>0)$，$\cos<\overrightarrow{PC},\overrightarrow{AD}>=\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{a}{\sqrt{x^2+2a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2+(\frac{x}{a})^2}}$，$\frac{x}{a}\in(0,+\infty)$

4. D，E 分别为 $A'B$，$A'C$ 中点时 AB 有最小值，最小值为$\frac{\sqrt{10}}{4}a$　提示：设 N 为 DE 中点，以 N 为坐标原点，NE，NA'，NA 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，设 $A'N=y$

5. 提示：取基向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，设$\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{OH}=\mu\overrightarrow{OK}$，$\overrightarrow{DK}=\gamma\overrightarrow{DE}$，于是$\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AG}=\lambda(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG})=-\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$，又$\overrightarrow{AH}=(1-\mu)\overrightarrow{AO}+\mu\overrightarrow{AK}=-(1-\mu)\overrightarrow{OA}+\mu[(1-\gamma)\overrightarrow{AD}+\gamma\overrightarrow{AE}]=-(1-\mu)\boldsymbol{a}+\mu(1-\gamma)\boldsymbol{b}+\mu\gamma\boldsymbol{c}$. 由对应系数相等得 $\lambda=\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$，$\gamma=\frac{1}{2}$

6. $\frac{15}{56}$　提示：设$\frac{B_1P}{B_1D}=\lambda$. $\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1C_1}$，所以$\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{B_1P}=\frac{4}{3}\overrightarrow{B_1M}+\frac{7}{5}\overrightarrow{B_1K}+2\overrightarrow{B_1N}$，$\overrightarrow{B_1P}=\frac{4}{3}\lambda\overrightarrow{B_1M}+\frac{7}{5}\lambda\overrightarrow{B_1K}+2\lambda\overrightarrow{B_1N}$. 又因为 P，M，K，N 四点共面，所以$\frac{4}{3}\lambda+\frac{7}{5}\lambda+2\lambda=1$，$\lambda=\frac{15}{71}$